GHEORGHE MÎNDRU

BAZELE ELECTROTEHNICII

EDITURA U.T.PRES
CLUJ-NAPOCA, 2005

Editura U.T.PRES
Str. C. Daicovicu nr. 15
400020 Cluj-Napoca
Tel.: 0264 – 401304; Fax: 0264 - 430408

Director: Prof.dr.ing. Traian Oneț
Consilier științific: Prof.dr.ing. Virgil Maier
Consilier editorial: Ing. Călin D. Câmpean

Descrierea CIP a Bibliotecii Na]ionale a Rom$niei
M%NDRU, GHEORGHE
Bazele electrotehnicii/ Gheorghe M^ndru . - Cluj-Napoca : U.T. Pres, 2005
p. : cm.
Bibliografie

ISBN 973-662-136-7

621.3

Copyright © 2005 Editura U.T.PRES
Toate drepturile asupra versiunii în limba română aparțin Editurii U.T.PRES. Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRES.
Tiparul executat la Atelierul de multiplicare al UTCN.

ISBN 973-662-136-7

PREFAȚĂ

Bazele electrotehnicii (sau Electrotehnica teoretică) are ca obiect studiul fenomenelor electromagnetice din perspectiva aplicațiilor tehnice ale acestora. Pe lângă explicarea fenomenelor şi a mărimilor caracteristice se prezintă legile şi teoremele asociate precum şi numeroşi algoritmi de calcul atât pentru mărimi de câmp, puteri, energii şi forțe electromagnetice, cât şi pentru evaluarea parametrilor de circuit.

Cartea se adresează atât studenților de profil electric cât şi studenților de la facultățile de Fizică şi specialiştilor care doresc să aprofundeze acest domeniu al ştiinței.

Problematica este abordată în cadrul teoriei macroscopice a fenomenelor electromagnetice şi numai parțial, pentru o mai bună înțelegere a unor aspecte, se recurge la interpretări microscopice.

Un capitol aparte îl constituie studiul regimurilor tranzitorii ale circuitelor electrice, care, spre deosebire de studiul regimurilor permanente (abordat în Teoria circuitelor electrice), utilizează metode matematice specifice.

Fiecare capitol este însoțit de numeroase aplicații care permit o mai bună înțelegere a problemelor şi algoritmilor expuşi; se insistă mai mult pe determinarea parametrilor funcționali ai diverselor dispozitive electromagnetice.

Cluj Napoca, ianuarie 2005 Autorul

CUPRINS

1. Elemente de analiză vectorială…… 1
1.1. Câmpuri scalare……... 1
1.2. Câmpuri vectoriale……... 2
1.3. Proprietățile funcțiilor de punct în diverse sisteme de coordonate……... 8
1.3.1. Sistemul cartezian……..... 8
1.3.2. Sistemul cilindric……..... 9
1.3.3. Sistemul sferic……..... 12
1.3.4. Sistemul curbiliniu triortogonal……..... 15
1.4. Aplicații……..... 17
2. Stările electrice şi magnetice ale corpurilor şi câmpului …….. 21
2.1. Starea de încărcare electrică a corpurilor……..... 23
2.1.1. Distribuții de sarcină electrică 24
2.2. Starea electrică de polarizare……..... 25
2.3. Starea electrocinetică a corpurilor……... 29
2.4. Starea de magnetizare a corpurilor……..... 35
2.5. Stările câmpului electric şi magnetic……..... 37
3. Legile fenomenelor electromagnetice …… 41
3.1. Legea fluxului electric. Aplicații……..... 42
3.2. Legea fluxului magnetic……..... 49
3.3. Legea circuitului magnetic. Aplicații……..... 52
3.3.1. Formele integrale ale legii 52
3.3.2. Formele locale ale legii 55
3.4. Legea inducției electromagnetice……... 60
3.4.1. Fenomenul de inducție electromagnetică 60
3.4.2. Formele integrale ale legii 62
3.4.3. Formele locale ale legii 68
3.5. Teoremele de refracție a liniilor de câmp ……... 70
3.6. Legea conservării sarcinii electrice……..... 72
3.6.1. Formele integrale ale legii 72
3.7. Legea conducției electrice. Metoda tuburilor şi feliilor……..... 75
3.8. Legea transformării energiei în conductori……..... 79
3.9. Legea polarizației electrice temporare……... 82
3.9.1. Materiale linaire şi izotrope 82
3.9.2. Materiale liniare şi anizotrope 83
3.10. Legea magnetizației temporare……..... 84
3.11. Aplicații……..... 88

4. Ecuaţiile câmpului electromagnetic ……..... 93
4.1. Legile câmpului electromagnetic – un sistem complet de ecuaţii 93
4.2. Teorema de unicitate a câmpului electromagnetic ……..... 97
4.3. Teorema superpoziţiei câmpurilor electromagnetice……... 98
4.4. Ecuaţiile lui Maxwell……... 99
4.5. Unda electromagnetică plană……... 102
4.6. Radiaţia undelor electromagnetice……... 108
4.6.1. Potenţiale electromagnetice întârziate……..... 108
4.6.2. Rezistenţa de radiaţie a circuitelor…….……..... 111
4.7. Aplicaţie 112
5. Regimul electrostatic şi magnetostatic…… 113
5.1. Teorema potenţialului electrostatic……..... 114
5.1.1. Proprietăţile potenţialului electric V 116
5.2. Capacităţi electrice. Aplicaţii……... 120
5.3. Relaţiile lui Maxwell privitoare la capacităţi ……..... 128
5.4. Metoda imaginilor electrice……..... 134
5.4.1. Imagini electrice în raport cu planul conductor infinit 135
5.4.2. Imagini electrice în raport cu cilindrul infint lung 138
5.4.3. Imaginile electrice în raport cu sfera conductoare 139
5.4.4. Câmpul electric între doi cilindrii paraleli. Axe electrice 140
5.5. Capacităţi în serviciu. Aplicaţii……... 142
5.5.1. Capacitatea în serviciu a unei linii bifilare în prezenţa pământului 144
5.6. Capacitatea unei antene……..... 147
5.6.1. Antena verticală 148
5.6.2. Antena orizontală 149
5.7. Regimul magnetostatic 150
6. Regimul magnetic staţionar …… 153
6.1. Potenţialul magnetic $\overline{A}$ şi ecuaţiile sale……... 153
6.2. Potenţialul $\overline{A}$ şi câmpul $\overline{B}$ create de fire parcurse de curent …….. 158
6.3. Metoda imaginilor magnetice……..... 160
6.4. Circuite magnetice……... 163
6.4.1. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice……..... 167
6.4.2. Rezolvarea circuitelor magnetice……..... 168
6.5. Inductivităţi……..... 171
6.5.1. Inductivităţi proprii şi mutuale 173
6.5.2. Relaţiile lui Maxwell pentru inductivităţi……..... 174
6.5.3. Legătura dintre inductivităţi şi t.e.m. induse……..... 176
6.5.4. Teorema lui Neumann……..... 177
6.6. Aplicaţii……..... 179

7. Energii şi forţe în câmpuri electromagnetice …… 185
7.1. Teorema energiei electrice……..… 185
7.2. Teorema energiei magnetice……..... 157
7.3. Teorema energiei electromagnetice……..... 190
7.3.1. Puterea electromagnetică transmisă printr-o undă plană…..... 192
7.3.2. Puterea electromagnetică transmisă printr-un conductor…..... 193
7.4. Teoremele forţelor generalizate (lagrangiene) în câmp electric..... 196
7.5. Teoremele forţelor generalizate în câmp magnetic……..... 199
7.6. Aplicaţii……..... 204
8. Corpuri conductoare în câmpuri variabile …… 211
8.1. Pătrunderea câmpului electromagnetic în semispaţiul conductor infinit extins ……... 211
8.2. Efectul de refulare……..... 214
8.3. Efectul de pătrundere……... 216
8.4. Efectul de proximitate…….. 216
8.5. Efectul de buclă……... 218
8.6. Efectul Field (direct şi invers)……..... 218
8.7. Efectul de ecranare……... 219
8.8. Efectul de levitaţie electromagnetică……... 220
9. Circuite electrice în regim tranzitoriu …….. 223
9.1. Teoremele condiţiilor iniţiale pentru comutaţii naturale……..... 225
9.2. Circuite simple sub excitaţii particulare……..... 227
9.2.1. Cuplarea şi decuplarea circuitului RL la o sursă continuă … 227
9.2.2. Cuplarea circuitelor RL la o sursă sinusoidală ……..... 231
9.2.3. Încărcarea şi descărcarea unui condensator……..... 232
9.2.4. Cuplarea circuitului RC la o sursă sinusoidală……..... 235
9.2.5. Regimul tranzitoriu al circuitului RLC serie……..... 236
9.2.6. Aplicaţii……..... 239
9.3. Analiza operaţională a circuitelor electrice în regim tranzitoriu pe baza transformatei Laplace 243
9.3.1. Teoremele transformatei Laplace 244
9.3.2. Schemele operaţionale ale circuitelor simple în regim tranzitoriu 248
9.3.3. Forma operaţională a teoremelor lui Kirchhoff 253
9.4. Comutaţii forţate 258
9.4.1. Teoremele condiţiilor iniţiale pentru comutaţii forţate la condensatoare 259
9.4.2. Teoremele condiţiilor iniţiale pentru comutaţii forţate la bobine 259
9.4.3. Aplicaţie 260

9.5. Analiza operațională a circuitelor electrice în regim tranzitoriu pe baza transformatei Fourier 262
9.6. Analiza circuitelor electrice în regim tranzitoriu în domeniul timp 266
9.6.1. Metoda integralei Duhamel 267
9.6.2. Răspunsul unui circuit la un semnal dat în funcție de răspunsul circuitului la un impuls unitate 270
9.6.3. Răspunsul unui circuit la un semnal dat în funcție de răspunsul circuitului la un semnal rampă unitate 272
9.7. Aplicații 273
10. Linii electrice lungi (linii omogene) …….. 287
10.1. Ecuațiile liniilor electrice lungi……..... 288
10.2. Regimul tranzitoriu al liniilor fără perderi……..... 290
10.3. Linii lungi în regim permanent sinusoidal……..... 292
Bibliografie 299

1. Elemente de analiză vectorială

1.2 Câmpuri scalare.

Fie o funcție scalară „f" definită într-un domeniu spațial (plan) $\mathcal{D}$ raportat la un sistem de coordonate *cartezian* (x, y, z), *cilindric* (z ,r, φ), sferic (r, θ, φ) etc. În fiecare punct din domeniu P_0 (x_0, y_0, z_0) funcția scalară are o valoare f_0 (x_0, y_0, z_0); unind punctele în care funcția f are aceeaşi valoare, se obține o *suprafață de nivel* pentru funcția f.
Prin intermediul *gradientului* se pot studia proprietățile variaționale ale funcției scalare f:

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k} \tag{1.1}$$

unde $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$ este un operator de derivare vectorial (nabla).

Funcția „grad f" are drept componente vitezele de variație ale funcției f după coordonate $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$, respectiv „grad f", în orice punct P (x, y, z) arată viteza de variație a funcției la trecerea prin acel punct ; grad f este orientat în sensul crescător al funcției f. În regiunea din $\mathcal{D}$ unde grad f este mare, acolo suprafețele de nivel (f = cst) sunt apropiate.

Variația funcției f după o direcție de versor $\bar{n}$ este:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \bar{n}\ \nabla f \tag{1.2}$$

Proprietățile funcției gradient sunt:

$$\begin{cases} \text{grad}(af) = a\ \text{grad } f \\ f = m \pm n \rightarrow \nabla f = \nabla(m \pm n) = \nabla m \pm \nabla n \\ f = m \cdot n \rightarrow \nabla f = \nabla(m \cdot n) = m\nabla n + n\nabla m \\ \text{grad } m = \text{grad } n \rightarrow m = n + cst \\ F = F(m, n, ...) \rightarrow \text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial m}\nabla m + \frac{\partial F}{\partial n}\nabla n + ... \end{cases} \tag{1.3}$$

Dacă $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ este vectorul de poziție într-un sistem cartezian (figura. 1.1-a) sau $\bar{r} = z\overline{u_z} + r\overline{u_r} + r\varphi\ \overline{u_\varphi}$ într-un sistem cilindric (figura 1.1-b), iar $r = \left|\bar{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ este modulul vectorului de poziție, atunci:

$$\text{grad } r = \nabla r = \frac{\bar{r}}{r} \tag{1.4}$$

şi este orientat în sensul creşterii coordonatei r.

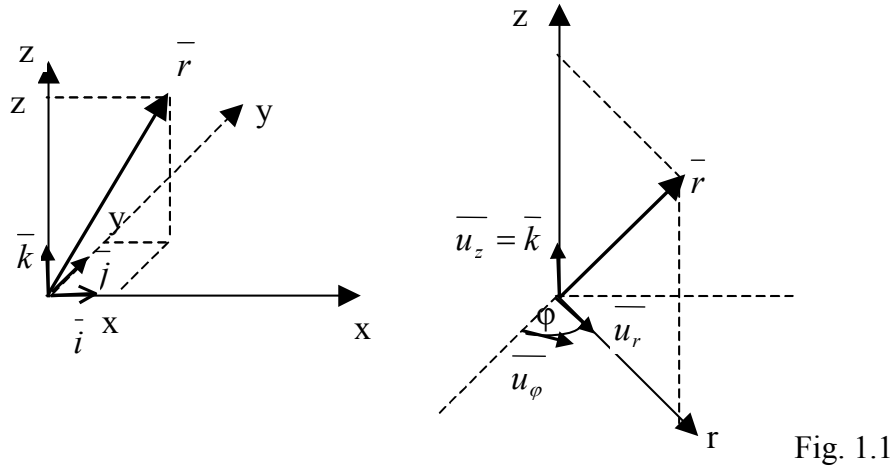


Fig. 1.1

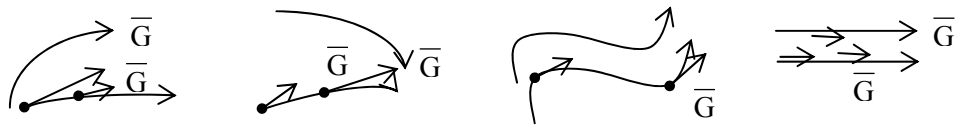
1.2 Câmpuri vectoriale.

Un câmp de vectori $\overline{G}$ definit într-un domeniu $\mathcal{D}$ este o funcție vectorială:

$$\overline{G} = \overline{G}(x, y, z) = G_x\bar{i} + G_y\bar{j} + G_z\bar{k} \tag{1.5}$$

şi în orice punct din domeniu are o *valoare* (modulul $G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}$), o *direcție* în spațiu, un *sens* pe direcția respectivă, deci o tripletă de valori în raport cu o funcție scalară f care are doar *valoare*.

Un *tub de flux unitate* conține atâția vectori (un mănunchi de vectori) cât este unitatea de măsură a fluxului respectiv. Fiecare tub unitate se înlocuieşte prin axa sa geometrică care va reprezenta o *linie de câmp* a lui $\overline{G}$. Într-o regiune din spațiu unde câmpul este intens, tuburile unitate vor fi apropiate iar acolo unde câmpul este slab, un tub unitate se adună pe o suprafață mai mare şi liniile de câmp vor fi mai îndepărtate. Geometria liniilor de câmp sugerează multe dintre proprietățile câmpului $\overline{G}$.



a) linii divergente; b) linii convergente; c) linii echidistante; d) linii paralele

Fig.1.2

În lungul liniei de câmp valoarea câmpului scade (fig. 1.2-a), creşte (fig. 1.2-b), rămâne constantă (fig. 1.2-c) sau este un câmp uniform (fig. 1.2-d).

Câmpul $\overline{G}$ rămâne tangent la linia de câmp; vectorii $\overline{G}$ şi $\overline{dr}$ fiind coliniari: $\overline{G} \times \overline{dr} = 0$, respectiv dacă $\overline{dr} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$, rezultă:

$$\frac{dx}{G_x} = \frac{dy}{G_y} = \frac{dz}{G_z} \tag{1.6}$$

care reprezintă ecuaţiile diferenţiale a căror soluţie sunt *ecuaţiile liniilor de câmp.*

Divergenţa unei funcţii vectoriale $\overline{G} = G_x\bar{i} + G_y\bar{j} + G_z\bar{k}$ se defineşte:

$$div\overline{G} = \nabla\overline{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \tag{1.7}$$

şi este o funcţie scalară care indică repartiţia surselor pentru liniile câmpului $\overline{G}$ în interiorul domeniului $\mathcal{D}$ de definiţie a câmpului $\overline{G}$.

Dacă într-un punct P_0 (x_0, y_0, z_0) din $\mathcal{D}$:

$\left(\text{div}\overline{G}\right)_{P_0} > 0 \rightarrow$ în punctul P_0 există surse (+) care produc linii de câmp $\overline{G}$. Valoarea $\text{div}\,\overline{G}$ arată care este productivitatea surselor din acel punct; $\left(\text{div}\overline{G}\right)_{P_0} = 2 \rightarrow$ la trecerea prin punctul P_0 se dublează numărul liniilor de câmp

$\left(\text{div}\overline{G}\right)_{P_0} < 0 \rightarrow$ în punctul P_0 există surse (-) numite *puţuri* care absorb linii de câmp.

$\left(\text{div}\overline{G}\right)_{P_0} = 0 \rightarrow$ nu există surse în P_0, liniile lui $\overline{G}$ trec continuu prin acel punct (numărul liniilor nici nu creşte nici nu scade).

Proprietățile „divergenței” se pot evidenția ținând seama că operatorul nabla (∇) este un operator de derivare vectorială:

$$\begin{cases} \overline{G} = k\overline{A} \rightarrow \text{div } \overline{G} = \nabla\overline{G} = k\nabla\overline{A} = k \text{ div } \overline{A} \\ \overline{G} = f\overline{A} \rightarrow \text{div } \left(f\overline{A}\right) = \nabla\left(f\overline{A}\right) = f\nabla\overline{A} + \overline{A}\nabla f = f \text{ div } \overline{A} + \overline{A} \text{ grad } f \\ \overline{G} = \text{grad } f = \nabla f \rightarrow \text{div } \left(\text{grad } f\right) = \nabla\left(\nabla f\right) = \Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \Delta = \nabla\nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \quad - \text{operatorul laplacean} \\ \overline{G} = \bar{r} \rightarrow \text{div } \bar{r} = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = \begin{cases} 3 \rightarrow \bar{r} \quad \text{vector spatial} \\ 2 \rightarrow \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}, \quad \text{vector plan} \end{cases} \end{cases}$$

Rotorul unei funcții vectoriale $\overline{G} = G_x\bar{i} + G_y\bar{j} + G_z\bar{k}$ se definește:

$$\text{rot } \overline{G} = \nabla \times \overline{G} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial y}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right)\bar{k} \tag{1.9}$$

deci rot $\overline{G}$ este tot o funcție vectorială care indică proprietățile geometrice ale liniilor de câmp $\overline{G}$.

rot $\overline{G}$ =0→ liniile lui $\overline{G}$ nu fac rotoare în domeniul $\mathcal{D}$, sunt linii deschise (cu capete, început şi sfârşit).

rot $\overline{G} \neq 0 \rightarrow$ liniile lui $\overline{G}$ sunt închise în domeniul $\mathcal{D}$ (fac rotoare în $\mathcal{D}$) sau trec prin domeniul $\mathcal{D}$ în fascicol paralel (deci se închid pe la infinit).

Câteva dintre proprietățile funcției „rotor” le amintim în continuare:

$$\overline{G} = \text{grad } f = \nabla f \rightarrow \text{rot } (\text{grad } f) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right)}_{=0} \bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k} \qquad (1.10)$$

Deci dacă:

$$\text{rot } \overline{G} = 0 \;\rightarrow\; \overline{G} = -\text{grad } V = -\nabla V \qquad (1.11)$$

funcția scalară V se numește *potențialul scalar* al câmpului $\overline{G}$.

Toate câmpurile $\overline{G}$ care provin dintr-un potențial scalar V prin intermediul gradientului se numesc *câmpuri potențiale* (newtoniene, irotaționale) și liniile lor sunt deschise, nu fac rotoare.

$$\overline{G} = f\overline{A} \rightarrow \text{rot } \left(f\overline{A}\right) = \nabla \times \left(f\overline{A}\right) = \nabla f \times \overline{A} + f\left(\nabla \times \overline{A}\right) = \\ = \text{grad } f \times \overline{A} + f \text{ rot } \overline{A} \qquad (1.12)$$

Dacă $\overline{G} = \overline{A} \times \overline{B}$, atunci aplicând formula lui Gibbs se obține succesiv:

$$\text{rot } \left(\overline{A} \times \overline{B}\right) = \nabla \times \left(\overline{A} \times \overline{B}\right) = \nabla \times \left(\dot{\overline{A}} \times \overline{B}\right) + \nabla \times \left(\overline{A} \times \dot{\overline{B}}\right) = \begin{vmatrix} \dot{\overline{A}} & \overline{B} \\ \nabla \overline{A} & \overline{B} \nabla \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \overline{A} & \dot{\overline{B}} \\ \overline{A} \nabla & \nabla \overline{B} \end{vmatrix} = \overline{A} \text{ div } \overline{B} - \overline{B} \text{ div } \overline{A} + \left(\overline{B} \text{ grad}\right)\overline{A} - \left(\overline{A} \text{ grad}\right)\overline{B} \qquad (1.13)$$

Dacă $\overline{G} = \text{rot } \overline{A} = \nabla \times \overline{A}$, aplicând (1.13) se obține:

$$\text{rot } (\text{rot } \overline{A}) = \nabla \times \left(\nabla \times \overline{A}\right) =$$

$$= \nabla\left(\nabla \overline{A}\right) - \underbrace{\overline{A}(\nabla \nabla)}_{=0} + \underbrace{\left(\overline{A} \nabla\right)\nabla}_{=0} - \underbrace{(\nabla \nabla)}_{=\Delta}\overline{A} = \text{grad } \left(\text{div } \overline{A}\right) - \Delta \overline{A} \qquad (1.14)$$

- Operatorul nabla acționează asupra cantităților din dreapta sa cu proprietăți de derivare (pe cele din stânga le înmulțește) iar dacă în dreapta sa nu există nimic, termenul este zero, ca în relația (1.14).

- $\overline{G} = \bar{r} \rightarrow \text{rot}\ \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

- Dacă $\overline{A}$ şi $\overline{B}$ sunt doi vectori, atunci se definesc produsele:

$\overline{A} \bullet \overline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ - produs scalar

$\overline{A} \times \overline{B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$ - produs vectorial

- produs mixt:

$$\overline{A} \bullet \left(\overline{B} \times \overline{C} \right) = \begin{cases} = 0, \text{când doi dintre vectori sunt paraleli} \\ \neq 0, \text{cei 3 vectori determină un paralelipiped} \end{cases}$$

- dublu produs vectorial (Gibbs):

$$\overline{A} \times \left(\overline{B} \times \overline{C} \right) = \begin{vmatrix} \overline{B} & \overline{C} \\ \overline{AB} & \overline{AC} \end{vmatrix}$$

$\text{div}\left(\text{rot}\overline{A} \right) = \nabla \bullet \left(\nabla \times \overline{A} \right) = 0$ - produs mixt în care doi vectori coincid.

Deci dacă:

$$\text{div}\overline{G} = 0 \ \rightarrow \ \overline{G} = \text{rot}\overline{A} \qquad (1.15)$$

funcția vectorială $\overline{A}$ este *potențialul vector* al câmpului $\overline{G}$.

Observații

- În teoria câmpului „gradientul”, „divergența” şi „rotorul” sunt *operatori diferențiali* de ordinul întâi care exprimați prin operatorul de derivare spațială nabla: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$, se scriu pe baza proprietăților de derivare şi înmulțire simultană a acestui operator: $\text{grad}\ f = \nabla f$; $\text{div}\overline{G} = \nabla \overline{G}$; $\text{rot}\overline{G} = \nabla \times \overline{G}$.

- Dacă în domeniul $\mathcal{D}$, $\text{rot}\overline{G} = 0$, înseamnă că liniile câmpului $\overline{G}$ nu se închid în acel domeniu (dar se pot închide în exteriorul său) şi în acelaşi timp dacă şi $\text{div}\overline{G} = 0$, înseamnă că liniile lui $\overline{G}$ nu au surse (capete) în $\mathcal{D}$ (dar poate avea surse în exterior). Un astfel de câmp se numeşte *câmp laplacean*.

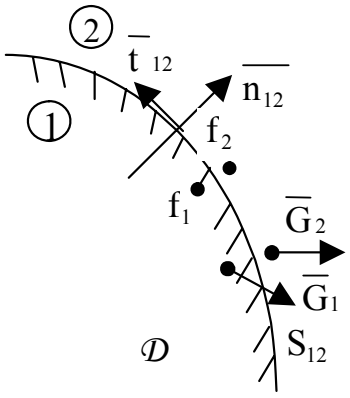


fig 1.3

Dacă în domeniul de câmp $\mathcal{D}$ există o suprafață de discontinuitate S_{12} care separă două regiuni cu proprietăți materiale diferite (sau la domenii plane există o curbă de discontinuitate C_{12}) ca în figura 1.3, atunci la trecerea prin discontinuitate, în sensul versorului normal la discontinuitate n_{12} orientat dinspre mediul 1 spre 2, funcția va avea o variație prin salt ($f_2 - f_1$), respectiv $\left(\overline{G_2} - \overline{G_1}\right)$, care reprezintă valorile celor două funcții la stânga şi la dreapta discontinuității S_{12}. În acest caz nu se pot defini operatorii grad, div şi rot, dar se operează cu operatorii superficiali:

- gradient superficial: $\text{grad}_s f = \overline{n_{12}}\left(f_2 - f_1\right)$
- divergența superficială: $\text{div}_s \overline{G} = \overline{n_{12}} \bullet \left(\overline{G_2} - \overline{G_1}\right) = G_{n2} - G_{n1}$
- rotor superficial: $\text{rot}_s \overline{G} = \overline{n_{12}} \times \left(\overline{G_2} - \overline{G_1}\right) = G_{t2} - G_{t1}$

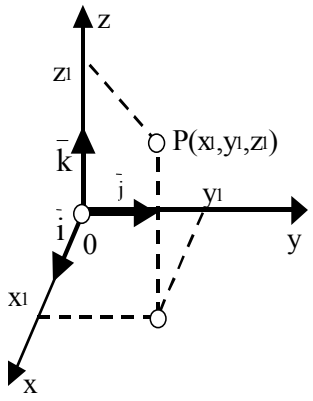
unde G_n este componenta lui $\overline{G}$ după normala la discontinuitate $\overline{n_{12}}$ iar G_t este componenta lui $\overline{G}$ după versorul tangent $\overline{t}$ la S_{12}.

Dacă $\overline{n}$ şi $\overline{t}$ sunt versorii normal şi tangent la o suprafață (curbă) atunci:

$$\overline{A} \bullet \overline{n} = A_n \qquad \overline{A} \times \overline{n} = \overline{A}_t$$
$$\overline{A} \bullet \overline{t} = A_t \qquad \overline{A} \times \overline{t} = \overline{A}_n$$

1.3 Proprietățile funcțiilor de punct în diverse sisteme de coordonate.

1.3.1 Sistemul cartezian (x,y,z) de versori ($\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$).



$$\bar{F}=F_x\bar{i}+F_y\bar{j}+F_z\bar{k};\quad \bar{F}\,\bar{G}=F_xG_x+F_yG_y+F_zG_z;$$

$$\bar{F}\times\bar{G}=(F_yG_z-F_zG_y)\bar{i}+(F_zG_x-F_xG_z)\bar{j}+(F_xG_y-F_yG_x)\bar{k};$$

$$\text{grad } V=\frac{\partial V}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\bar{k};$$

$$\nabla=\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z};$$

$$\text{div }\bar{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z};$$

$$\text{rot}\,\bar{F}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\bar{k};$$

$$\nabla^2V=\Delta V=\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2};\qquad \Delta\bar{F}=\text{grad div }\bar{F}-\text{rot rot }\bar{F};$$

$$\nabla^2\bar{F}=\Delta\bar{F}=\nabla^2F_x\bar{i}+\nabla^2F_y\bar{j}+\nabla^2F_z\bar{k}=\Delta F_x\bar{i}+\Delta F_y\bar{j}+\Delta F_z\bar{k};$$

$$\text{grad div}\,\bar{F}=\left(\frac{\partial^2F_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2F_z}{\partial x\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial^2F_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2F_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F_z}{\partial y\partial z}\right)\bar{j}+$$

$$\left(\frac{\partial^2F_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2F_y}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2F_z}{\partial z^2}\right)\bar{k};$$

$$\text{grad }\bar{k}\,\bar{F}=\bar{k}\times\text{rot}\,\bar{F}+\frac{\partial\bar{F}}{\partial z};\quad \text{div}(\bar{k}\times\bar{F})=-\bar{k}\,\text{rot}\,\bar{F};\quad \text{rot}(\bar{k}\times\bar{F})=\bar{k}\,\text{div}\,\bar{F}-\frac{\partial\bar{F}}{\partial z};$$

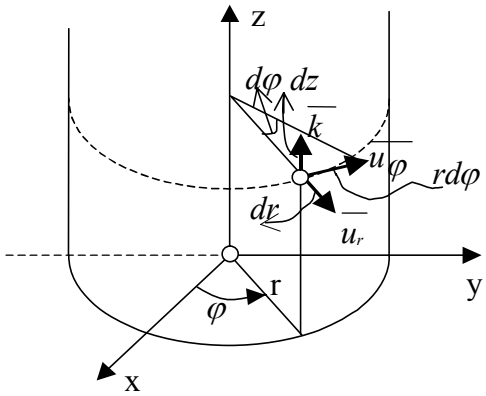
$$\text{rot rot}(\bar{k}\times\bar{F})=-\bar{k}\times\text{grad div}\,\bar{F}-\text{rot}\frac{\partial\bar{F}}{\partial z};$$

$$\text{grad div }\bar{k}\,V=\frac{\partial}{\partial z}(\text{grad }V)=\text{grad}\frac{\partial V}{\partial z};$$

$$\text{rotrot}\,\bar{F}=\left(-\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 F_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F_z}{\partial x\partial z}\right)\bar{i}+\left(-\frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_z}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 F_x}{\partial y\partial x}\right)\bar{j}$$
$$+\left(-\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 F_y}{\partial z\partial y}\right)\bar{k};$$

$$\text{rot}\,\bar{k}\,V=\text{grad}\,V\times\bar{k};\quad \nabla^2(\bar{k}\times\bar{F})=\bar{k}\times\nabla^2\bar{F};$$
$$\text{grad div}\,\bar{k}\times\bar{F}=-\bar{k}\times\text{rot rot}\,\bar{F}-\text{rot}\frac{\partial\bar{F}}{\partial z};$$
$$\nabla^2(\bar{k}\,V)=\bar{k}\;\nabla^2 V;\qquad \text{rot rot}(\bar{k}\,V)=-\bar{k}\,\nabla^2 V+\text{grad}\frac{\partial V}{\partial z}.$$

1.3.2 Sistemul cilindric circular (r,φ,z) de versori ($\bar{u}_r,\bar{u}_\varphi,\bar{u}_z=\bar{k}$)



$$\text{rot.rot}\,\bar{F}=\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_r}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2 F_r}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 F_z}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right)\bar{u}_r+$$
$$\left(-\frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F_z}{\partial\varphi\partial z}-\frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial r}+\frac{F_\varphi}{r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F_r}{\partial\varphi\partial r}\right)\bar{u}_\varphi$$
$$+\left(-\frac{\partial^2 F_z}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_z}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 F_r}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial\varphi\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\bar{k}.$$

$$\bar{F}=F_r\bar{u}_r+F_\varphi\bar{u}_\varphi+F_z\bar{u}_z;$$
$$\bar{u}_r=-\bar{i}\cos\varphi+\bar{j}\sin\varphi;$$
$$\bar{u}_\varphi=-\bar{i}\sin\varphi+\bar{j}\cos\varphi;$$

$$\bar{i} = \bar{u}_r \cos\varphi - \bar{u}_\varphi \sin\varphi;$$
$$\bar{j} = \bar{u}_r \sin\varphi + \bar{u}_\varphi \cos\varphi;$$
$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2;$$
$$dv = r\, dr\, d\varphi\, dz;$$

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad r^2 = x^2 + y^2; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x};$$

$$F_r = F_x \cos\varphi + F_y \sin\varphi;$$
$$F_\varphi = -F_x \sin\varphi + F_y \cos\varphi;$$
$$F_x = F_r \cos\varphi - F_\varphi \sin\varphi;$$
$$F_y = F_r \sin\varphi + F_\varphi \cos\varphi;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}; \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x}\; y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial y}; \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\bar{u}_r \times \bar{u}_\varphi = \bar{k}; \qquad \bar{u}_\varphi \times \bar{k} = \bar{u}_r; \qquad \bar{k} \times \bar{u}_r = \bar{u}_\varphi; \qquad \bar{F}\,\bar{G} = F_r G_r + F_\varphi G_\varphi + F_z G_z;$$

$$\bar{F} \times \bar{G} = (F_\varphi G_z - F_z G_\varphi)\,\bar{u}_r + (F_z G_r - F_r G_z)\,\bar{u}_\varphi + (F_r G_\varphi - F_\varphi G_r)\,\bar{k};$$

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial r}\bar{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\bar{u}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\bar{k}; \qquad \nabla = \bar{u}_r\frac{\partial}{\partial r} + \bar{u}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z};$$

$$\operatorname{div}\bar{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{F_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z};$$

$$\nabla^2 V = \Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$

$$\nabla^2 \bar{F} = \Delta \bar{F} = \left(\Delta F_r - \frac{F_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\right)\bar{u}_r + \left(\Delta F_\varphi - \frac{F_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\right)\bar{u}_\varphi + \Delta F_z \bar{k};$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{F} = \left(\frac{\partial^2 F_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{F_r}{r^2}\right)\bar{u}_r +$$

$$+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F_z}{\partial\varphi\partial z}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F_r}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\right)\bar{u}_\varphi+$$

$$\left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial\varphi\partial r}+\frac{\partial^2 F_r}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial z}\right)\bar{k}$$

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial r}=\frac{\partial F_r}{\partial r}\bar{u}_r+\frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\bar{u}_\varphi+\frac{\partial F_z}{\partial r}\bar{k};$$

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial\varphi}=\bar{k}\times\bar{F}+\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\bar{u}_r+\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\bar{u}_\varphi+\frac{\partial F_z}{\partial\varphi}\bar{k};$$

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial z}=\frac{\partial F_r}{\partial z}\bar{u}_r+\frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\bar{u}_\varphi+\frac{\partial F_z}{\partial z}\bar{k};\quad \frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\varphi}=\bar{u}_\varphi;\quad \frac{\partial\bar{u}_\varphi}{\partial\varphi}=-\bar{u}_r;$$

$$\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial r}=\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial z}=\frac{\partial\bar{u}_\varphi}{\partial r}=\frac{\partial\bar{u}_\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\bar{k}}{\partial r}=\frac{\partial\bar{k}}{\partial\varphi}=\frac{\partial\bar{k}}{\partial z}=0;$$

$$\operatorname{div}\bar{u}_r=\frac{1}{r};\qquad \operatorname{div}\bar{u}_\varphi=\operatorname{div}\bar{k}=0;$$

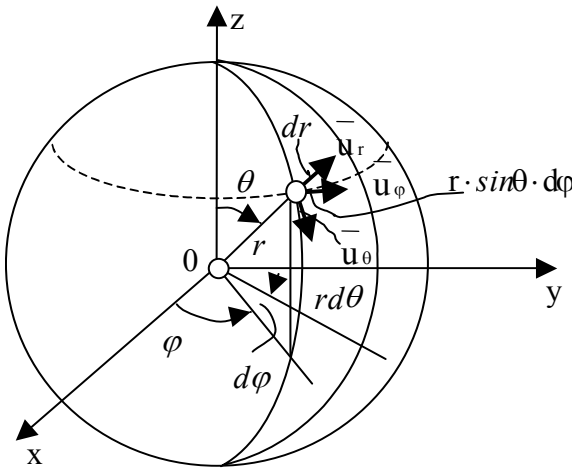
$$\operatorname{rot}\bar{u}_\varphi=\frac{\bar{k}}{r};\qquad \operatorname{rot}\bar{u}_r=\operatorname{rot}\bar{k}=0;$$

$$\operatorname{div}(\bar{u}_r\times\bar{F})=-\bar{u}_r\operatorname{rot}\bar{F};\qquad \operatorname{div}(\bar{u}_\varphi\times\bar{F})=\frac{F_z}{r}-\bar{u}_\varphi\operatorname{rot}\bar{F};$$

$$\operatorname{div}(\bar{k}\times\bar{F})=-\bar{k}\operatorname{rot}\bar{F};\quad \operatorname{rot}(\bar{u}_r\times\bar{F})=\bar{u}_r\operatorname{div}\bar{F}-\frac{\partial\bar{F}}{\partial r}-\frac{\bar{u}_r\bar{F}_r}{r}-\frac{\overline{u_z F_z}}{r};$$

$$\operatorname{rot}(\bar{u}_\varphi\times\bar{F})=-\bar{u}_r\frac{F_\varphi}{r}+\bar{u}_\varphi\operatorname{div}\bar{F}-\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi};\qquad \operatorname{rot}(\bar{k}\times\bar{F})=\bar{k}\operatorname{div}\bar{F}-\frac{\partial\bar{F}}{\partial z};$$

1.3.3 Sistemul sferic (r,θ,φ) de versori ($\bar{u}_r$, $\bar{u}_\theta$, $\bar{u}_\varphi$).



$$\bar{F}=F_r\bar{u}_r+F_\theta\bar{u}_\theta+F_\varphi\bar{u}_\varphi;$$

$$\bar{F}\,\bar{G}=F_rG_r+F_\theta G_\theta+F_\varphi G_\varphi$$

$$\bar{F}\times\bar{G}=(F_\theta G_\varphi-F_\varphi G_\theta)\,\bar{u}_r+(F_\varphi G_r-F_r G_\varphi)\,\bar{u}_\theta+(F_r G_\theta-F_\theta G_r)\,\bar{u}_\varphi;$$

$$\bar{u}_r=\bar{i}\sin\theta\cos\varphi+\bar{j}\sin\theta\sin\varphi+\bar{k}\cos\theta;$$

$$\bar{u}_\theta=\bar{i}\cos\theta\cos\varphi+\bar{j}\cos\theta\sin\varphi-\bar{k}\sin\theta;$$

$$\bar{u}_\varphi=-\bar{i}\sin\varphi+\bar{j}\cos\varphi;$$

$$\bar{i}=\bar{u}_r\sin\theta\cos\varphi+\bar{u}_\theta\cos\theta\cos\varphi-\bar{u}_\varphi\sin\varphi;$$

$$\bar{j}=\bar{u}_r\sin\theta\sin\varphi+\bar{u}_\theta\cos\theta\sin\varphi+\bar{u}_\varphi\cos\varphi;$$

$$\bar{k}=\bar{u}_r\cos\theta-\bar{u}_\theta\sin\theta;$$

$$dl^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2;$$

$$dv=r^2\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\varphi;$$

$$x=r\sin\theta\cos\varphi;\quad y=r\sin\theta\sin\varphi;\quad z=r\cos\theta;$$

$$r^2=x^2+y^2+z^2;\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z};\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{cos\,\theta\,sin\,\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{cos\,\varphi}{r\,sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi};$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{sin\,\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta};$$

$$\bar{u}_r\times\bar{u}_\theta=\bar{u}_\varphi;\quad \bar{u}_\varphi\times\bar{u}_r=\bar{u}_\theta;\quad \bar{u}_\theta\times\bar{u}_\varphi=\bar{u}_r;$$

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial r}=\frac{\partial F_r}{\partial r}\bar{u}_r+\frac{\partial F_\theta}{\partial r}\bar{u}_\theta+\frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\bar{u}_\varphi;$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta}=(\bar{u}_\varphi \times \bar{F})+\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\bar{u}_r+\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\bar{u}_\theta+\frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}\bar{u}_\varphi;$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi}=(\bar{k} \times \bar{F})+\frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\bar{u}_r+\frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\bar{u}_\theta+\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\bar{u}_\varphi;$$

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \varphi}=\sin\theta\,\bar{u}_\varphi;\quad \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta}=\bar{u}_\theta;\quad \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta}=\bar{u}_r;\quad \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \varphi}=\cos\theta\,\bar{u}_\varphi;$$

$$\frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial \varphi}=-\bar{u}_r\sin\theta-\bar{u}_\theta\cos\theta;\qquad \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r}=\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r}=\frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial r}=\frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial \theta}=0;$$

$$\operatorname{div}\bar{u}_r=\frac{2}{r};\quad \operatorname{div}\bar{u}_\varphi=0;\quad \operatorname{div}\bar{u}_\theta=\frac{1}{r}\frac{1}{\operatorname{tg}\theta};$$

$$\operatorname{rot}\bar{u}_r=0;\quad \operatorname{rot}\bar{u}_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\bar{u}_r}{\operatorname{tg}\theta}-\frac{1}{r}\bar{u}_\theta;\qquad \operatorname{rot}\overline{u_\theta}=\frac{1}{r}\bar{u}_\varphi;$$

$$\operatorname{div}(\bar{u}_r\times\bar{F})=-\bar{u}_r\operatorname{rot}\bar{F};$$

$$\operatorname{div}(\bar{u}_\varphi\times\bar{F})=\frac{1}{r}\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}F_r-\frac{F_\theta}{r}-\bar{u}_\varphi\operatorname{rot}\bar{F};\quad \operatorname{div}(\overline{u_\theta}\times\bar{F})=\frac{1}{r}F_\varphi-\bar{u}_\theta\operatorname{rot}\bar{F};$$

$$\operatorname{rot}(\bar{u}_r\times\bar{F})=\bar{u}_r\operatorname{div}\bar{F}-\frac{1}{r}\overline{F}-\frac{1}{r}\overline{F_r}-\frac{\partial \bar{F}}{\partial r}$$

$$\operatorname{rot}(\bar{u}_\theta\times\bar{F})=\bar{u}_\theta\operatorname{div}\bar{F}-\frac{1}{r}\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}(F_r\bar{u}_r+F_\theta\bar{u}_\theta)-\frac{1}{r}F_\theta\bar{u}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta};$$

$$\operatorname{rot}(\bar{u}_\varphi\times\bar{F})=\bar{u}_\varphi\operatorname{div}\bar{F}-\frac{1}{r}F_\varphi\bar{u}_r-\frac{1}{r}\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}F_\varphi\bar{u}_\theta-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi}=$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\bar{u}_r-\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\bar{u}_\theta+\left[\frac{\partial F_r}{\partial r}+\frac{F_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\right]\bar{u}_\varphi.$$

$F_r=\sin\theta\cos\varphi\,F_x+\sin\varphi\sin\theta\,F_y+\cos\theta\,F_z;$
$F_\theta=\cos\theta\cos\varphi\,F_x+\sin\varphi\cos\theta\,F_y-\sin\theta\,F_z;$
$F_\varphi=-\sin\varphi\,F_x+\cos\varphi\,F_y;$
$F_x=\sin\theta\cos\varphi\,F_r-\sin\varphi\,F_\varphi+\cos\theta\cos\varphi\,F_\theta;$
$F_y=\sin\theta\sin\varphi\,F_r+\cos\varphi\,F_\varphi+\cos\theta\sin\varphi\,F_\theta;$
$F_z=\cos\theta\,F_r-\sin\theta\,F_\theta;$

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}=\frac{xz}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial y}-\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x};$$

$$\text{grad } V=\frac{\partial V}{\partial r}\bar{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\bar{u}_\theta+\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\bar{u}_\varphi;$$

$$\nabla=\bar{u}_r\frac{\partial}{\partial r}+\bar{u}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}+\bar{u}_\varphi\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi};$$

$$\text{div}\,\bar{F}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\,F_\theta)+\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}=$$

$$=\frac{\partial F_r}{\partial r}+2\frac{F_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\frac{1}{\text{tg}\theta}F_\theta+\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\text{rot}\,\bar{F}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(F_\varphi\sin\theta\right)-\frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right]\bar{u}_r++\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi}-\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_\varphi\right)\right]\bar{u}_\theta$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_\theta\right)-\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]\bar{u}_\varphi=\left[\frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\frac{F_\varphi}{\text{tg}\theta}-\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right]\bar{u}_r+$$

$$\left[\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi}-\frac{\partial F_\varphi}{\partial r}-\frac{F_\varphi}{r}\right]\bar{u}_\theta+\left[\frac{\partial F_\theta}{\partial r}+\frac{F_\theta}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]\bar{u}_\varphi;$$

$$\nabla^2V=\Delta V=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2V}{\partial \varphi^2}=$$

$$=\frac{\partial^2V}{\partial r^2}+2\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2V}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\text{tg}\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2V}{\partial \varphi^2};$$

$$\nabla^2\bar{F}=\Delta\bar{F}=\left[\nabla^2F_r-\frac{2F_r}{r^2}-\frac{2\text{ctg}\theta}{r^2}F_\theta-\frac{2}{r^2}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\right]\bar{u}_r+$$

$$+\left[\nabla^2 F_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial\theta} - \frac{F_\theta}{r^2 sin^2\theta} - \frac{2cos\theta}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right]\bar{u}_\theta +$$

$$+\left[\nabla^2 F_\varphi + \frac{2}{r^2 sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{F_\varphi}{r^2 sin^2\theta} + \frac{2cos\theta}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right]\bar{u}_\varphi;$$

$$rot.rot\,\bar{F} =$$

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F_\theta}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_r}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{tg\theta}\frac{\partial F_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{1}{tg\theta}\frac{F_\theta}{r} - \frac{1}{r^2}\frac{1}{tg\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\theta} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 F_r}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right]\bar{u}_r +$$

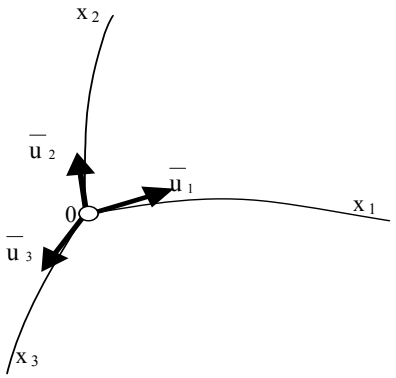
$$+\left[\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial\varphi\partial\theta} + \frac{cos\theta}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 F_\theta}{\partial\varphi^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F_r}{\partial r\partial\theta} - \frac{\partial^2 F_\theta}{\partial r^2}\right]\bar{u}_\theta +$$

$$\left[\frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial^2 F_r}{\partial\varphi\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{1}{tg\theta}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \frac{F_\varphi}{r^2 sin^2\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 F_\theta}{\partial\theta\partial\varphi} - \frac{cos\theta}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right]\bar{u}_\varphi;$$

1.3.4 Sistemul curbiliniu triortogonal (x_1,x_2,x_3) de versori ($\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3$) şi h_1,h_2,h_3 coeficienți Lamé



$$\bar{F} = F_1\bar{u_1} + F_2\bar{u_2} + F_3\bar{u_3};$$

$$\bar{F}\,\bar{G} = F_1G_1 + F_2G_2 + F_3G_3;$$

$$dl_j = h_j\,dx_j; \quad j=1,2,3;$$

$$dl^2 = h_1^2\,dx_1^2 + h_2^2\,dx_2^2 + h_3^2\,dx_3^2;$$

$$rotrot\,\bar{F} =$$

$$=\frac{1}{h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{h_3}{h_1h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_2F_2-\frac{\partial}{\partial x_2}h_1F_1\right)\right]--\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{h_2}{h_3h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}h_1F_1-\frac{\partial}{\partial x_1}(h_3F_3)\right)\right]\right\}\overline{u_1}+$$

$$+\frac{1}{h_3h_1}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{h_1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}h_3F_3-\frac{\partial}{\partial x_3}h_2F_2\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{h_3}{h_1h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_2F_2-\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1F_1)\right)\right]\right\}\overline{u_2}$$

$$+\frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{h_2}{h_3h_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}h_1F_1-\frac{\partial}{\partial x_1}h_3F_3\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{h_1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}h_3F_3-\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2F_2)\right)\right]\right\}\overline{u_3};$$

$$\text{grad } V=\frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}\overline{u_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}\overline{u_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial V}{\partial x_3}\overline{u_3};$$

$$\nabla=\overline{u_1}\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\overline{u_2}\ \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}+\overline{u_3}\ \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$\text{div }\overline{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3F_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3h_1F_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1h_2F_3)\right];$$

$$\text{rot }\overline{F}=$$

$$=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3F_3)-\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2F_2)\right]\overline{u_1}+\frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1F_1)-\frac{\partial}{\partial x_1}(h_3F_3)\right]$$

$$\overline{u_2}+\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2F_2)-\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1F_1)\right]\overline{u_3};$$

$$\nabla^2V=\Delta V=$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial x_3}\right)\right]$$

.

Observatii:

-sistem de coordonate cartezian:
$x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $h_1=h_2=h_3=1$.

-sistem de coordonate cilindric:
$x_1=r$, $x_2=\varphi$, $x_3=z$, $h_1=h_3=1$, $h_2=r$.

-sistem de coordonate sferic:
$x_1=r$, $x_2=\theta$, $x_3=\varphi$, $h_1=1$, $h_2=r$, $h_3=r\sin\theta$.

-sistem de coordonate al cilindrului eliptic:

$x_1=\xi$, $x_2=\eta$, $x_3=z$, $h_1= h_2=a\sqrt{cos^2\xi - cos^2\eta}$, $h_3=1$.

-sistem de coordonate toroidale:

$$x_1=\xi,\ x_2=\varphi,\ x_3=\psi,\ h_1= h_2=\frac{a}{cos\,\xi + cos\,\varphi},\ h_3= a\frac{sh\xi}{ch\xi + cos\,\varphi}$$

$$x= a\frac{cos\,\psi sh\xi}{ch\xi + cos\,\varphi},\quad y= a\frac{sin\,\psi sh\xi}{ch\xi + cos\,\varphi},\quad z= -a\frac{sin\,\varphi}{ch\xi + cos\,\varphi}\ .$$

1.4. Aplicații.

1. Pentru orice funcție ce conține vectorul de poziție, funcțiile sale de punct se pot scrie succesiv:

$$\overline{G}_1 = k\,r^n\,\bar{r} \rightarrow div\overline{G}_1 = k\,\nabla\left(r^n\bar{r}\right) = k\,\bar{r}\,\nabla\left(r^n\right) + k\,r^n\nabla\bar{r} =$$

$$= k\,\bar{r}\,n\,r^{n-1}\frac{\bar{r}}{r} + k\,r^n 3 = k\left(n+3\right)r^n$$

$$\rightarrow rot\,\overline{G}_1 = \nabla\times\left(k\,r^n\,\bar{r}\right) = k\left(\nabla r^n\right)\times\bar{r} + k\,r^n\underbrace{\left(\nabla\times\bar{r}\right)}_{=0} =$$

$$= k\,n\,r^{n-1}\frac{\bar{r}}{r}\times\bar{r} = 0$$

$$V_1 = \frac{1}{r} \rightarrow gradV_1 = \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-1}{r^2}\,\frac{\bar{r}}{r}$$

$$V_2 = \frac{1}{r^n} \rightarrow gradV_2 = \nabla\left(\frac{1}{r^n}\right) = \frac{-n}{r^{n+1}}\nabla r = \frac{-n}{r^{n+2}}\,\bar{r}$$

2. Se consideră funcțiile scalare f. Să se calculeze gradientul lor.

$$f(x,y,z)=\frac{z}{x^2+y^2}\rightarrow \nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\bar{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\bar{u}_\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\bar{u}_z$$

$$\text{sau } \nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$$

$$f(r,\varphi,z)=\frac{z}{r^2}\rightarrow \nabla f=-\frac{2z}{r^3}\bar{u}_r+\frac{1}{r^2}\bar{u}_z$$

3. Se consideră funcția vectorială: $\overline{G}=x^2\,\bar{i}+e^{xy}\,\bar{j}+x\,y\,z\,\bar{k}$. Să se calculeze $\text{div}\overline{G}$ şi valoarea sa în punctul P(-1,1,1).

$$\text{div}\overline{G}=\nabla\overline{G}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2)+\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy})\frac{\partial}{\partial z}(x\,y\,z)=2\,x+x\,e^{xy}+x\,y$$

$$\text{div}\overline{G}\Big|_{(-1,1,2)}=-2-e^{-1}-1=-3-\frac{1}{e}$$

4. Pentru funcția $\overline{G}=x^2\,y^2\,\bar{i}+2\,x\,y\,z\,\bar{j}+z^2\bar{k}$, să se calculeze $\text{rot}\overline{G}$ şi valoarea sa în punctual $P_0(1,-2,1)$.

$$\text{rot}\overline{G}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}=-2\,x\,y\,\bar{i}+(2\,y\,z-2\,x^2\,y)\,\bar{k};\quad \text{rot}\overline{G}\Big|_{P_c}=4\bar{i}$$

5. Să se calculeze circulația vectorului $\overline{G}=x^2\bar{i}+y^2\bar{j}+z^2\bar{k}$ pe dreapta P_1P_2 sau pe curba $P_1P_2P_3P_4$ din figura 1.4.

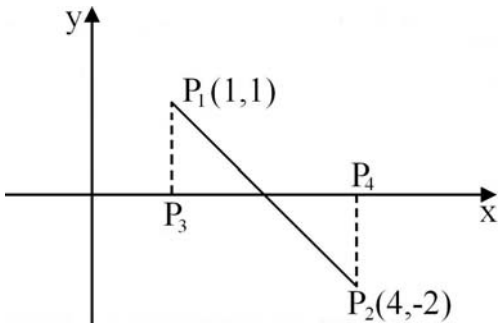


Fig. 1.4

Ecuația dreptei P_1P_2 este $y=-x+2$, iar elementul de linie este: $\overline{d\ell}=dx\,\bar{i}+dy\,\bar{j}+dz\,\bar{k}$. Deci

$$I=\int_{P_2}^{P_1}\overline{G}\;\overline{d\ell}=\int_1^4\left[x^2\bar{i}+(-x+2)^2\,\bar{j}\right]$$

$$(\bar{i}-\bar{j})\,dx=(2x^2-4x)\Big|_1^4=18$$

Circulația pe conturul $P_1-P_3-P_4-P_2$ este:

$$I' = \int_{P_1}^{P_3} \overline{G}\,\overline{dl} + \int_{P_3}^{P_4} \overline{G}\,\overline{dl} + \int_{P_4}^{P_2} \overline{G}\,\overline{dl} = \int_{P_1}^{P_2} \overline{G}\left(-\bar{j}\,dy\right) + \int_{P_3}^{P_4} \overline{G}\left(\bar{i}\,dx\right) + \int_{P_4}^{P_2} \overline{G}\left(-\bar{j}\,dy\right) =$$

$$= \int_0^1 -y^2\,dy + \int_1^4 x^2\,dx + \int_{-2}^0 -y^2\,dy = -\frac{1}{3} + \frac{63}{3} + \frac{8}{3} = 18$$

deci valoarea integralei între punctele P_1 - P_2 nu depinde de drumul de integrare. Astfel de câmpuri poartă numele de câmpuri potențiale şi derivă dintr-o funcție scalară prin intermediul gradientului.

6. Să se verifice teorema lui Stokes cu vectorul $\overline{A} = y\,\bar{i} - x\,\bar{j}$ pentru curba Γ din figura 1.5.

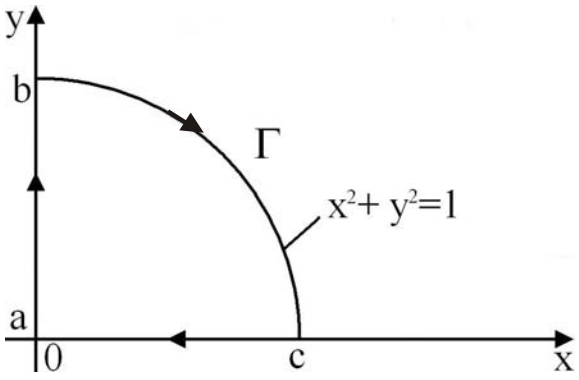


Fig. 1.5

$\overline{A}\,\overline{d\ell} = y\,dx - x\,dy$, deoarece $\overline{d\ell} = dx\,\bar{i} + dy\,\bar{j}$

Pe porțiunea (a-b), având $\begin{cases} x = 0 \\ dx = 0 \end{cases} \rightarrow \overline{A}\,\overline{d\ell} = 0$

Pe porțiunea (b-c): $y = \sqrt{1 - x^2} \rightarrow$

$$\rightarrow dy = -\frac{x\,dx}{y} = \frac{-x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\rightarrow \overline{A}\overline{d\ell} = \sqrt{1 - x^2}\,dx + \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\int_b^c \overline{A}\overline{d\ell} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

Pe porțiunea (c-a): $\begin{cases} y = 0 \\ dy = 0 \end{cases} \rightarrow \overline{A}\overline{d\ell} = 0$

Atunci: $\oint_\Gamma \overline{A}\;\overline{d\ell} = \int_a^b \overline{A}\;\overline{d\ell} + \int_b^c \overline{A}\;\overline{d\ell} + \int_c^a \overline{A}\;\overline{d\ell} = 0 + \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

De asemenea: $\text{rot}\,\overline{A} = \nabla \times \overline{A} = \nabla \times \left(y\,\bar{i} - x\,\bar{j}\right) = -2\bar{k}$ şi $\overline{ds} = -dx\,dy\,\bar{k}$

Rezultă: $\int_{S_\Gamma} \text{rot}\overline{A}\,\overline{ds} = \int_{x=0}^{x=1} dx \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} 2\,dy = 2\,S_\Gamma = 2\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Deci: $\oint_\Gamma \overline{A}\;\overline{d\ell} = \int_{S_\Gamma} \text{rot}\overline{A}\;\overline{ds} = \frac{\pi}{2}$,

Ceea ce înseamnă că se verifică teorema lui Stokes.

2. Stările electrice şi magnetice ale corpurilor şi câmpului

Orice sistem fizic este constituit din corpuri (substantă) şi din câmp electromagnetic care există atât în interiorul corpurilor cât şi în spaţiul dintre corpuri. Stările electrice şi magnetice ale unui sistem fizic sunt complet caracterizate prin următoarele mărimi primitive:

- q – *sarcina electrică*, caracterizează *starea de încărcare cu sarcină a* corpurilor electrice [C].
- i – *intensitatea curentului electric*, caracterizează *starea electrocinetică* a corpurilor [A].
- $\bar{p}$ – *momentul electric*, caracterizează *starea de polarizare* a corpurilor [Cm].
- $\bar{m}$ – *momentul magnetic*, caracterizează starea de *magnetizare a corpurilor* [Am^2].
- $\bar{E}$ – *intensitatea câmpului electric*, caracterizează *aspectul electric* al câmpului electromagnetic [V/m].
- $\bar{B}$ – *inducţia magnetică*, caracterizează *aspectul magnetic* al câmpului electromagnetic [T].

Mărimile fizice (cele susceptibile de determinări cantitative) după modul cum sunt definite sunt de două feluri:

- *mărimi primitive* - se definesc printr-un experiment, în orice teorie numărul lor este fix
- *mărimi derivate* - se definesc printr-o relaţie, plecând de la mărimile primitive

Mărimile fizice se mai pot clasifica şi pe alte criterii:

- *mărimi de stare* - acele mărimi care trebuiesc cunoscute pentru a determina univoc starea unui sistem fizic. Numărul lor creşte odată cu dezvoltarea ştiinţei
- *mărimi de proces* - acele mărimi care definesc interacţiunea dintre un sistem fizic şi alte sisteme (evoluţia sa în timp şi spaţiu)

- *mărimi extensive (globale)* - valorile lor se adună la reuniunea a două sisteme fizice (masă, volum, sarcină electrică);
- *mărimi intensive (locale)* - caracterizează local (punct cu punct) un sistem fizic. Nu se adună la reuniunea sistemelor fizice (temperatură, presiune, densitate de sarcină electrică).

Stările neelectrice ale corpurilor (geometrice, mecanice, termice) au un caracter intrinsec şi permanent iar stările electrice şi magnetice au un caracter extrinsec şi trecător (unei sfere metalice îi pot atribui din exterior stări electrice prin încărcarea sa cu sarcină electrică şi îi pot retrage aceste proprietăţi prin descărcarea sa).

Definirea stărilor electrice şi magnetice ale corpurilor este mai dificilă, în astfel de stări corpurile interacţionează cu alt sistem fizic - câmpul electromagnetic din jurul corpurilor.

Pentru fenomene staţionare (invariabile în timp) sau cvasistaţionare (lent variabile în timp, frecvenţe mici) forţele ce se exercită între corpurile cu proprietăţi electrice sau magnetice se transmit instantaneu de la un corp la altul (ca în mecanica clasică, unde corpurile sunt în contact).

Pentru fenomene nestaţionare (variabile în timp) forţele se transmit de la un corp la altul cu viteză finită, prin intermediul câmpului electromagnetic ce le separă, deci au nevoie de un timp de propagare (aici acţiunea nu-i egală cu reacţiunea, ele nu acţionează simultan).

Observaţie:

Noţiunea de *câmp* (sistem fizic, formă de existenţă a materiei) a fost introdusă în fizică de către Faraday în sec XIX prin formularea teoriei de acţiune prin contiguitate (din aproape în aproape, în spaţiu şi timp şi a reprezentat un progres enorm în înţelegerea proceselor fizice, deşi mult timp a primit o interpretare mecanicistă (câmpul era privit ca o stare de deformare a unei substanţe ipotetice numită eter, care s-ar afla pretutindeni atât în corpuri cât şi în afara lor. Orice manifestare prin câmp era o întindere, comprimare, tăiere a liniilor de câmp.

Prin "câmp" vom înţelege în primul rând un sistem fizic care are propietăţi materiale (posedă energie şi impuls) dar în acelaşi timp, în sens matematic, câmp este mulţimea valorilor unei funcţii (scalare sau vectoriale). Câmp este şi regiunea din spaţiu care posedă proprietăţi speciale sau chiar "intensitatea câmpului electric E" este numită sub forma prescurtată *câmpul* $\bar{E}$.

2.1 Starea de încărcare electrică a corpurilor

Pentru corpuri de dimensiuni mici starea de încărcare este complet caracterizată prin sarcina electrică q. Obținerea stării de încărcare, numită şi *electrizarea* unui corp, se poate realiza prin mai multe procedee: frecare, încălzire, întindere, comprimare, contact cu alte corpuri electrizate, iradiere cu raze ultraviolete sau X. Sarcina q se defineşte pe baza forței electrice ce se exercită asupra sa atunci când este introdus corpul mic într-un câmp electric exterior $\bar{E}$:

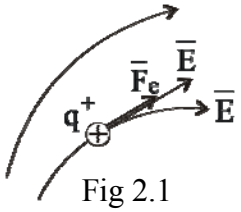


Fig 2.1

$$\bar{F}_e = q\,\bar{E} \qquad (2.1)$$

Sarcina q este (+) atunci când $\bar{F}_e$ şi $\bar{E}$ sunt omoparaleli şi este (–) cand sunt antiparaleli.

La scară microscopică, sarcina electrică se distribuie pe corp în mod discontinuu (discret); sarcina electrică ca şi masa de inerție sunt un atribut al particulelor elementare. Macroscopic, masa şi sarcina electrică se consideră mărimi fizice cu repartiție continuă în corpuri; un volum „$d\upsilon$" care este infinitezimal macroscopic, conține un număr foarte mare de particule elementare, deci sarcina se distribuie continuu în interiorul său.

Sarcina q se poate defini şi printr-un alt experiment, bazat pe forța Coulomb ce se exercită între două „sarcini punctiforme" q_1 şi q_2:

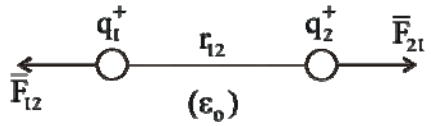


Fig 2.2

$$\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\bar{r}_{12}}{r_{12}^{\,3}} \qquad (2.2)$$

Sensul forței de tip Coulomb este astfel încât sarcinile de acelaşi semn se resping iar cele de semne contrare se atrag. $\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\left[\mathrm{F/m}\right]$ este *permitivitatea vidului* (constantă universală).

Expresia (2.2) este valabilă dacă:

- cele două sarcini sunt punctiforme (de fapt corpuri punctiforme încărcate cu sarcină – dimensiunile corpurilor mult mai mici ca distanța r_{12}).
- cele două corpuri să nu se mişte în spațiu (forța Coulomb rămâne doar o tendință, nu pune corpurile în mişcare).
- sarcinile q_1 şi q_2 să nu fie variabile în timp.

Unitatea de măsură a sarcinii electrice este *coulombul* [C], care este sarcina unui mic corp care exercită o forţă de $9\cdot10^9$ N (de tipul 2.2) asupra altui mic corp încărcat cu aceeaşi sarcină şi situat în vid la o distanţă r_{12}=1m. Sarcina de 1 C este foarte mare, practic se lucrează cu subunităţi: μC, nC etc.

2.1.1 Distribuţii de sarcină electrică

Pentru corpuri mici este suficient a cunoaşte sarcina q totală cu care este încărcat corpul. Pentru corpuri nepunctiforme (masive) sarcina se distribuie în volumul sau pe suprafaţa lor în diverse moduri şi trebuie cunoscută în acest caz *distribuţia (densitatea) sarcinii*. Pe elementele dυ, ds, dl, sarcina se admite ca este distribuită uniform.

a) *Distribuţie volumetrică de sarcină*. Este specifică corpurilor masive (nepunctiforme) din material *dielectric* (izolant) şi se defineşte:

$$\rho_v=\frac{dq}{dv}\quad\left[C/m^3\right] \tag{2.3}$$

Dacă ρ_v = ct – corpul este *încărcat uniform* cu sarcină electrică, iar dacă $\rho_v=\rho_v(\bar{r})$ – aceasta este legea de distribuţie a sarcinii pe volumul corpului:

$$\begin{cases}\rho_v=ct & \longrightarrow\ q=\int_{V_{corp}}\rho_v d\upsilon=\rho_v V_{corp}\\ \rho_v=\rho_v(\bar{r}) & \longrightarrow\ q=\int_{V_{corp}}\rho_v(\bar{r})d\upsilon\end{cases} \tag{2.4}$$

b) *Distribuţia superficială de sarcină*. Este specifică pentru corpuri cu două dimensiuni (o pânză foarte subţire având forma S în spaţiu) sau în cazul corpurilor conductoare care se încarcă numai superficial cu sarcină (în acest caz S este suprafaţa exterioară a conductorului). Densitatea superficială de sarcină este:

$$\rho_s=\frac{dq}{ds}\quad\left[C/m^2\right] \tag{2.5}$$

$$\text{Dacă}\begin{cases}\rho_s=ct\text{ -(distribuţie uniformă)} & \longrightarrow\ q=\int_S\rho_s ds=\rho_s S\\ \rho_s=\rho_s(\bar{r})\text{-(distribuţie neuniformă)} & \longrightarrow\ q=\int_S\rho_s(\bar{r})ds\end{cases} \tag{2.6}$$

c) *Distribuţia liniară de sarcină.* Este specifică corpurilor cu o singură dimensiune (este cazul firelor subţiri, curba C este axa firului):

$$\rho_\ell = \frac{dq}{d\ell}\left[\frac{C}{m}\right] \tag{2.7}$$

$$\text{Dacă}\begin{cases}\rho_\ell = ct - (\text{distribuție uniformă}) \longrightarrow q = \int_C \rho_\ell d\ell = \rho_\ell \ell_C \\ \rho_\ell = \rho_\ell(\bar{r}) - (\text{distribuție neuniformă}) \longrightarrow q = \int_C \rho_\ell(\bar{r}) d\ell\end{cases} \tag{2.8}$$

2.2 Starea electrică de polarizare

Starea de polarizare electrică a unui corp este acea stare care determină apariția asupra corpului a unor *acțiuni ponderomotoare* (forțe, cupluri) atunci când este introdus într-un câmp electric exterior chiar dacă acel corp nu este încărcat cu sarcină electrică. Apariția unor cupluri arată că starea de polarizare are un caracter vectorial (starea de încărcare cu sarcină avea un caracter scalar). Doar materialele dielectrice se polarizează.

Corpurile polarizate pot fi în acelaşi timp şi încărcate cu sarcină electrică. Un corp polarizat introdus într-un câmp electric uniform este supus unor cupluri (este rotit) iar în câmp neuniform este supus la forțe şi cupluri.

Polarizarea unui corp poate să fie $\begin{cases}1.\ \text{temporară}\begin{cases}\text{de deformare}\\ \text{de orientare}\end{cases}\\ 2.\ \text{permanentă}\end{cases}$

1. *Polarizarea temporară* apare sub influența unui câmp electric exterior şi este specifică tuturor materialelor dielectrice. Intensitatea sa depinde de intensitatea câmpului electric în care a fost introdus corpul şi dispare la scoaterea corpului din câmp.

2. *Polarizarea permanentă* nu este cauzată de un câmp electric, are alte cauze neelectrice, care dau nume fenomenului:

-*piezoelectrică:* apare la materiale cu structură cristalină; prin deformarea unui cristal pe fețele sale apare o tensiune. Fenomenul este reversibil: aplicând o tensiune de o anumită frecvență între două fețe, cristalul se va deforma cu aceeaşi frecvență (generatoare de ultrasunete, etaloane de frecvență, măsurarea timpului).

- *piroelectrică*: cristalele încălzite se polarizează electric

- *electreții:* unele materiale (răşinoase) încălzite până se înmoaie şi lăsate apoi să se răcească într-un câmp electric exterior, vor rămâne polarizate pe direcția acelui câmp (sunt echivalentul electric al magneților permanenți)

- *feroelectrică:* materiale care se polarizează neliniar (după un ciclu D(E) de tip histerezis) rămân cu o polarizare remanentă.

Polarizarea de deformare este unul dintre mecanismele microscopice de producere a polarizării temporare şi este specifică materialelor cu molecule simetrice (*diaelectrice*). De exemplu, pentru atomul de hidrogen (fig 2.3), în stare neutră centrul acţiunii (–) a electronului orbital coincide în spaţiu cu centrul acţiunii (+) a nucleului şi în exteriorul învelişului, atomul este neutru.

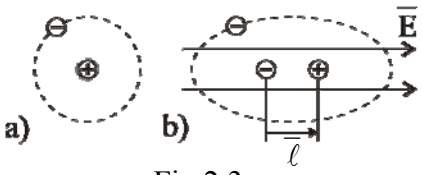


Fig 2.3

Prin introducerea atomului în câmpul exterior $\bar{E}$, orbita se deformează şi cele două centre (+) si (–) nu mai coincid, ele se vor găsi în focarele elipsei pe care are loc mişcarea electronului (figura 2.3 – b).

În exteriorul său, atomul se comportă ca un dipol electric având momentul electric:

$$\bar{p}=q\bar{\ell} \tag{2.9}$$

Deplasarea celor două centre este foarte mică (ℓ<<), practic proporţională cu intensitatea câmpului electric exterior $\bar{E}$ şi momentul $\bar{p}$ obţinut este pe direcţia câmpului $\bar{E}$. Deformaţii analoage capătă şi atomii sau moleculele cu o constituţie mai complicată.

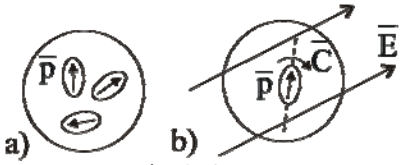


Fig 2.4

Polarizarea de orientare (rotaţie) este un mecanism microscopic specific substanţelor cu molecule polare, nesimetrice (*paraelectrice*) care posedă momente electrice $\bar{p}$ şi în lipsa câmpului exterior $\bar{E}$ (figura 2.4-a), numai că agitaţia termică determină o aşezare stohastică (dezordonată) a dipolilor elementari, astfel încât pentru un element dv din corp momentul electric rezultant este nul.

Sub acţiunea câmpului $\bar{E}$ dipolii vor fi rotiţi de către câmp, cuplul exercitat este:

$$\bar{C}=\bar{p}\times\bar{E} \tag{2.10}$$

şi determină rotirea lor pe direcţia câmpului. Când $\bar{p} \uparrow\uparrow \bar{E}$, cuplul va fi zero. Acestei acţiuni i se opune agitaţia termică: o menţinere a momentelor $\bar{p}$ pe direcţia câmpului $\bar{E}$ se obţine ori în câmpuri electrice infinit de mari, ori temperatura corpului tinde spre zero absolut, când dispare agitaţia termică. De obicei, odată cu orientarea în câmp, momentul electric creşte, deci are loc şi o polarizare de deformare.

Acțiunea microscopică de deformare a orbitelor şi de orientare a momentelor electrice microscopice pe direcția câmpului $\overline{E}$ este apreciată macroscopic ca "polarizarea substanței" corpului pe direcția câmpului $\overline{E}$.

Dacă intensitatea câmpului $\overline{E}$ depăşeşte o anumită valoare E_r (*rigiditatea dielectrică* a materialului respectiv), deci $E > E_r$ atunci materialul dielectric a fost străpuns, s-au desprins electronii de pe orbită, au devenit liberi şi materialul nu mai este dielectric, el a devenit material conductor.

Momentul electric $\overline{p}$ este mărimea primitivă care caracterizează macroscopic starea de polarizare a unui corp dielectric mic. Introdus într-un câmp electric neuniform, asupra sa se exercită un cuplu $\overline{C}$ (care-l va orienta pe direcția câmpului $\overline{E}$) şi o fortă $\overline{F}$ care-l va deplasa spre regiunea unde câmpul $\overline{E}$ este mai intens.

$$\begin{cases} \overline{C} = \overline{p} \times \overline{E} \\ \overline{F} = \text{grad}\left(\overline{p} \overset{\downarrow}{\overline{E}} \right) = \left(\overline{p}\ \text{grad} \right) \overline{E} = \overline{p} \left(\dfrac{\partial \overline{E}}{\partial x} \overline{i} + \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial y} \overline{j} + \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial z} \overline{k} \right) \end{cases} \tag{2.11}$$

În câmpuri electrice uniforme nu există decât rotații ($\overline{F} = 0$).

Un corp masiv polarizat poate fi considerat ca o reuniune de mici corpuri polarizate, fiecare având momentul său electric $\overline{p}$. Starea locală de polarizare în jurul unui punct din corp este caracterizată prin densitatea momentelor electrice $\overline{p}$ în jurul acelui punct:

$$\overline{P} = \frac{d\overline{p}}{dv} \tag{2.12}$$

Mărimea $\overline{P}$ se numeşte *polarizație electrică* şi va avea şi ea (la fel ca şi $\overline{p}$) o componentă temporară ($\overline{P}_t$) şi una permanentă ($\overline{P}_p$) având cauze neelectrice:

$$\overline{P} = \overline{P}_p + \overline{P}_t \tag{2.13}$$

Dacă $\overline{P} = ct$ – corp uniform polarizat, iar dacă $\overline{P} = \overline{P}(\overline{r})$ – aceasta este legea de polarizare a corpului.

Cunoscând polarizația în orice punct din corp, momentul electric al corpului masiv $\overline{p}_{corp}$ va fi:

$$\overline{p}_{corp} = \int_{V_{corp}} \overline{P}\, d\upsilon \tag{2.14}$$

Observație:

Nu trebuie confundată *polarizarea* (fenomenul la care este supusă substanța dielectrică) cu *polarizația* $\overline{P}$ (mărime de stare prin care apreciez punctual intensitatea fenomenului).

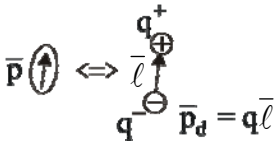


Fig 2.5

Un mic corp polarizat de moment electric $\bar{p}$ poate fi echivalat cu un dipol electric de moment $\bar{p}_d = q\,\bar{\ell}$ ca în figura 2.5. Ambele produc acelaşi câmp electric în jurul lor, respectiv introduse într-un câmp $\bar{E}_{ext}$ vor fi supuse la aceleaşi acţiuni (C,F) dacă $p = p_d$.

Dimensional: $[\bar{p}] = [q][\ell] = C \cdot m$

$$\bar{P} = \frac{d\bar{p}}{d\upsilon} \rightarrow \left[\bar{P}\right] = \frac{C \cdot m}{m^3} = \frac{C}{m^2};$$

Sarcinile ±q situate la extremităţile dipolului echivalent, la distanţa $\bar{\ell}$ se numesc *sarcini dipolare*.

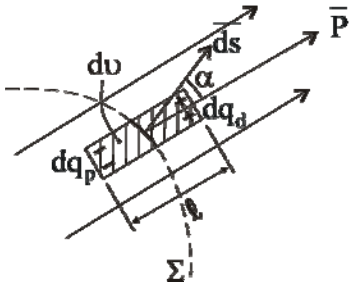


Fig 2.6

Pentru un corp masiv polarizat, un element $d\upsilon$ din corp are momentul electric $d\bar{p} = \bar{P}\,d\upsilon$, iar volumul său este $d\upsilon = \ell\,ds\cos\alpha$ (figura 2.6).

Sarcina dipolară este:

$$dq_d = \frac{d\bar{p}}{\ell} = \frac{\bar{P}\,d\upsilon}{\ell} = P\,ds\,\cos\alpha = \bar{P}\,\overline{ds} \qquad (2.15)$$

Sarcina dipolară rămasă în interiorul suprafeţei închise Σ, arbitrară ca formă, numită *sarcină de polarizaţie* va fi:

$$dq_p = -dq_d = -\bar{P}\,\overline{ds}$$

Sarcina totală de polarizaţie din interiorul suprafeţei Σ este:

$$q_p = \int_{\Sigma} dq_p\,d\upsilon = -\int_{\Sigma} \bar{P}\,\overline{ds} \qquad (2.16)$$

deci egală cu (–) fluxul polarizaţiei $\bar{P}$ prin suprafaţa închisă Σ.

Dacă admitem că această sarcină fictivă (*sarcina de polarizaţie*) se distribuie în volumul delimitat de Σ cu o densitate volumetrică ρ_{v_p}, atunci se poate scrie:

$$\left.\begin{aligned} q_p &= \int_{V_\Sigma} \rho_{V_p}\,d\upsilon \\ q_p &= -\int_{V_\Sigma} \bar{P}\,d\upsilon = -\int_{V_\Sigma} \mathrm{div}\bar{P}\,d\upsilon \end{aligned}\right\} \xrightarrow{v_\Sigma = \text{arbitrar}} \rho_{V_p} = -\mathrm{div}\bar{P} \qquad (2.17)$$

Relaţia (2.17) pune în evidenţă faptul că liniile lui $\bar{P}$ încep pe sarcinile de polarizaţie (–) şi se termină pe cele (+). Dacă un corp este uniform polarizat $\bar{P} = ct$, $\mathrm{div}\,\bar{P} = 0$, atunci $\rho_{v_p} = 0$.

Dacă în volumul corpului există suprafețe S_{12} de discontinuitate, acestea se vor încărca cu distribuții superficiale de sarcină:

$$\rho_{S_p} = -\mathrm{div}_s \bar{P} = -\bar{n}_{12}(\bar{P}_2 - \bar{P}_1) = P_{n_2} - P_{n_1} \qquad (2.18)$$

unde $\bar{P}_1$ şi $\bar{P}_2$ sunt valorile polarizației pe cele două fețe a lui S_{12} iar $\bar{n}_{12}$ este versorul normal (local) la S_{12} dinspre fața 1 spre 2.

Dacă nu există discontinuități în corp, atunci cel puțin suprafața exterioară a corpului este o discontinuitate între corp şi mediul exterior şi aceasta se va încărca cu sarcină de polarizație superficială de tipul (2.18).

Observație:

Sarcinile de polarizație sunt *sarcini fictive* care echivalează starea reală de polarizare a substanței corpului. Elimin substanța corpului (rămâne vid), deci omogenizez domeniul şi în locul substanței pun distribuțiile ρ_{V_p} şi ρ_{S_p} .

În vid (sau aer uscat, apropiat de vid) un câmp electric este caracterizat prin intensitatea sa $\bar{E}$ iar în interiorul unui corp a cărui substanță se poate polariza (deci modifică valoarea câmpului) el este caracterizat printr-o pereche de mărimi de stare ($\bar{E}$ şi $\bar{D}$):

$\bar{E}$ – *intensitatea câmpului electric* în punctul M (figura 2.7), este valoarea câmpului în acel punct înainte de a plasa acolo substanța corpului (creat de surse exterioare).

$\bar{D}$ – *inducția electrică* în punctul M, este valoarea câmpului în acel punct după ce substanța corpului a modificat câmpul existent inițial.

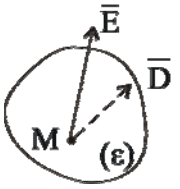


Fig 2.7

Dacă materialul corpului este izotrop (cu aceleaşi proprietăți pe toate direcțiile) atunci cele două mărimi $\bar{E}$ şi $\bar{D}$ au aceeaşi direcție, iar dacă este anizotrop (au proprietați diferite pe diverse direcții) atunci $\bar{E}$ şi $\bar{D}$ au direcții diferite (figura 2.7). Între cele două mărimi de stare a aceluiaşi sistem fizic (câmpul electric din interiorul corpului) există o legatură:

$$\bar{D} = \varepsilon_o \bar{E} + \bar{P} \qquad (2.19)$$

numită *legea legăturii în câmp electric* (legea legăturii dintre mărimile: $\bar{D}$ - inducția electrică, $\bar{E}$ - intensitatea câmpului electric şi $\bar{P}$ - polarizația electrică).

2.3 Starea electrocinetică a corpurilor

Regimul electrocinetic defineşte starea de conducție a liniilor de curent de către materialele conductoare. Un câmp electric existent într-o piesă conductoare determină apariția unui curent electric de conducție

(determinând o mişcare ordonată a sarcinilor electrice libere din conductor). Un conductor parcurs de curent este însoţit de efecte speciale:

- *efecte mecanice* - interacţionează mecanic cu alte conductoare parcurse de curent sau cu un câmp magnetic extern.
- *efecte magnetice* - interacţiunea cu alte conductoare parcurse de curent, cu un magnet permanent sau cu $\overline{B}_{ext}$ se datorează câmpului magnetic care s-a produs în jurul conductorului parcurs de curent.
- *efecte chimice* - trecerea curentului printr-un mediu conductor poate fi însoţit sau nu de reacţii chimice. La conductoare de speţa I-a (metale, cele cu conducţie electronică) nu apar reacţii chimice dar la conductoare de speţa II-a (soluţii, cele cu conducţie ionică) fenomenul de conducţie este însoţit de reacţii chimice (electroliză).
- *efecte calorice* - conductoarele parcurse de curent se încălzesc (efect Joule).
- *efecte luminoase* - apar fie ca urmare a celor termice care duc la incandescenţă, fie ca urmare a descărcărilor în gaze (tuburi luminoase).
- *efecte electrice* - un conductor încărcat cu sarcină ca în figura 2.8-a, are suprafaţa sa echipotenţială şi $\overline{E}$ este perpendicular pe conductor. Când este parcurs de curent, potenţialul conductorului scade în lungul liniilor de curent şi $\overline{E}$ iese înclinat din suprafaţa conductorului , iar liniile echipotenţiale sunt ca în (figura 2.8-b).

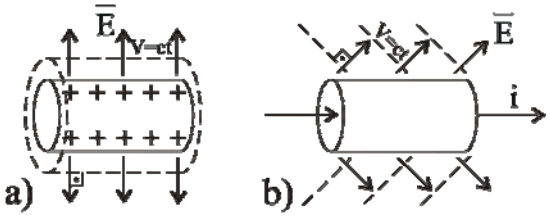


Fig 2.8

Microscopic, starea electrocinetică este dată de mişcarea ordonată a sarcinilor libere faţă de structura corpului conductor.

Starea electrocinetică este caracterizată macroscopic printr-o singură mărime primitivă i – *intensitatea curentului electric de conducţie*. Această mărime poate fi pusă în evidenţă prin diverse experimente.

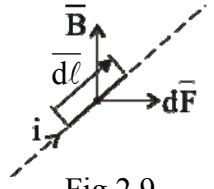


Fig 2.9

a) Asupra unui element $\overline{d\ell}$ dintr-un conductor parcurs de curent şi plasat în câmpul exterior având inducţia magnetică $\overline{B}$ se exercită o forţă magnetică (de tip Laplace).

$$\overline{dF} = i(\overline{d\ell} \times \overline{B}) \qquad (2.20)$$

Elementul $\overline{d\ell}$ este orientat în *sensul* curentului i. Dacă o sarcină q se miscă cu viteza $\overline{v}$ în câmpul $\overline{B}$, asupra sa se exercită o forță de tip Lorentz: $\overline{F}=q\,(\overline{v}\times\overline{B})$. Comparând această expresie a forței cu (2.20) se constată că „$i\cdot\overline{d\ell}$" şi „$q\cdot\overline{v}$" au aceeaşi dimensiune şi semnificație (o sarcină q în mişcare cu viteza $\overline{v}$ înseamnă un curent electric). Dimensional se obține:

$$[i]=\frac{[q][v]}{[dl]}=\frac{C\frac{m}{s}}{m}=\frac{C}{s}=A\ (\text{Ampere}) \qquad (2.21)$$

Sensul curentului (sensul lui $\overline{d\ell}$) corespunde sensului de mişcare a unei particule q încărcată (+) cu viteza $\overline{v}$. Cum la metale particulele libere sunt electronii liberi (deci sarcini (–)), sensul de referintă al curentului este invers cu sensul de mişcare a electronilor liberi.

Unitatea de măsură (Amperul) s-a definit pe baza forței electrodinamice (de tip Ampère) ce se exercită între două conductoare filiforme paralele, parcurse de curenții i_1 şi i_2 (figura 2.10):

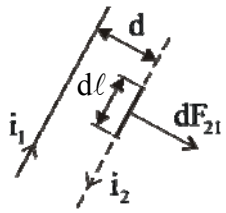


Fig 2.10

$$dF_{21}=\frac{\mu_o i_1 i_2}{2\pi d}d\ell=B_1 i_2 d\ell \qquad (2.22)$$

fiind forță de atracție când curenții i_1 şi i_2 au acelaşi sens şi de respingere în caz contrar. Dacă $i_1=i_2=1A$ şi $\mu_o=4\cdot\pi\cdot10^{-7}\,H/m$ este *permeabilitatea vidului,* atunci asupra unui segment de lungime 1m din conductorul 2 se exercită o forță de $2\cdot10^{-7}$ N/m. Cum *amperul absolut* este bazat pe efecte mecanice (mai greu de controlat), *amperul internațional* se bazează pe efectul chimic al curentului electric: dacă un curent de 1A trece printr-o soluție de azotat de argint, depune la catod într-o secundă 1,118 mg Ag.

a) *Curentul de conducție:*

Intensitatea curentului de conducție printr-o secțiune a conductorului reprezintă sarcina ce traversează secțiunea respectivă într-o secundă.

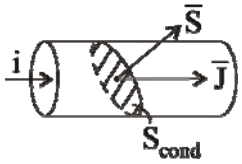


Fig 2.11

$$i=\frac{dq}{dt}\quad\left[\frac{C}{s}=A\right] \qquad (2.23)$$

Curentul i se distribuie pe secțiunea conductorului cu densitatea $\overline{J}$ (figura 2.11):

$$i=\int_{S_{cond}}\overline{J}\,\overline{ds} \qquad (2.24)$$

$\bar{J}$ – *densitatea curentului de conducție* [A/m²] caracterizează local (în fiecare punct) starea electrocinetică. Fluxul său (relația 2.24) printr-o secțiune este chiar intensitatea curentului electric de conducție i.

Liniile vectorului $\bar{J}$ se numesc *linii de curent*, sensul său corespunde cu sensul curentului.

• dacă $\bar{J}$ este $\perp$ pe suprafața S şi uniform (J = ct) atunci:

$$i = \int_{S_{cond}} \bar{J}\,\overline{ds} = \bar{J}\,\bar{S} = J\,S$$ şi conductorul se numeşte *filiform*.

• Dimensional: $[J] = \frac{[i]}{[S]} = \left[A/m^2 \right]$

• dacă $\bar{J}$ nu se distribuie uniform pe secțiunea transversală a conductorului, acesta este *nefiliform* (sau *masiv*). Aceasta depinde şi de grosimea conductorului dar în primul rând de frecvența curentului.

O bară groasă, în joasă frecvență (sau curent continuu) este filiformă, iar un fir subțire în înaltă frecvență este masiv (efecte peliculare).

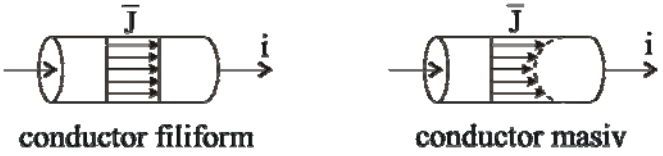


Fig 2.12

În general, dacă printr-o suprafață deschisă S_Γ, mărginită de curba Γ (figura 2.13) trece un curent electric, atunci prin elementul de suprafață orientat $\overline{ds}$ va trece curentul:

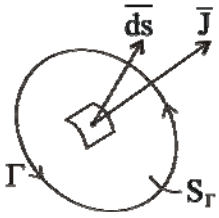


Fig 2.13

$$di = \bar{J}\,\overline{ds} \qquad (2.25)$$

iar prin toată suprafața S_Γ va trece:

$$i_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \bar{J}\,\overline{ds} \qquad (2.26)$$

Dacă prin S_Γ trec mai multe conductoare parcurse de curent (filiforme sau nu) în diferite sensuri, atunci i_{S_Γ} este un curent de conducție generalizat numit *solenația* prin suprafața S_Γ.

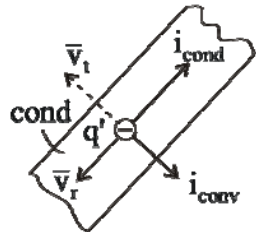


Fig 2.14

b) *Curentul de convecție (transport)*

Mişcarea ordonată a particulelor libere ($-q'$) cu viteza relativă $\bar{v}_r$ determină un *curent de conducție* (i_{cond}) prin piesa conductoare (figura 2.14).

Dacă conductorul este mobil în spațiu cu viteza

de transport $\bar{v}_t$, această mişcare a sarcinii $(-q')$ determină un curent de convecţie (transport).

Practic, un curent de convecţie apare prin mişcarea cu viteza $\bar{v}$ a unui corp încărcat în exces de sarcină (+) sau (–).

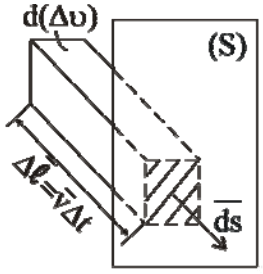


Fig 2.15

Considerăm un element de volum $d(\Delta\upsilon)$ dintr-un corp încărcat cu densitatea de sarcină ρ_v, care se mişcă cu viteza $\bar{v}$ şi traversează suprafaţa S (figura 2.15). Dorim să evaluăm curentul de convecţie prin suprafaţa S.

Elementul de volum având expresia:

$$d(\Delta\upsilon) = \Delta\bar{\ell}\ \overline{ds} = \overline{ds}\ \bar{v}\ \Delta t \qquad (2.27)$$

încărcat uniform cu densitatea ρ_v, trece prin S în timpul Δt. Curentul de convecţie prin elementul ds, odată cu trecerea lui $d(\Delta\upsilon)$ se poate scrie succesiv sub forma:

$$di_C = \frac{d(\Delta q)}{\Delta t} = \frac{\rho_V \cdot d(\Delta\upsilon)}{\Delta t} = \frac{\rho_V \overline{ds}\ \bar{v}\ \Delta t}{\Delta t} = \rho_V \overline{ds}\ \bar{v} = \bar{J}_c \overline{ds} \qquad (2.28)$$

Densitatea curentului de convecţie este:

$$\bar{J}_C = \rho_v \bar{v}\ ; \quad \left[\bar{J}_C\right] = [\rho_v][v] = \frac{C}{m^3}\ \frac{m}{s} = A/m^2 \qquad (2.29)$$

Ea depinde de densitatea sarcinii din corpul mobil (ρ_V) dar şi de viteza cu care acesta se mişcă.

Curentul de convecţie (transport) prin toată suprafaţa S este:

$$i_C = i_T = \int_S \bar{J}_C\ \overline{ds} = \int_S \rho_v \bar{v}\ \overline{ds} \qquad (2.30)$$

Dacă are loc mişcarea unei distribuţii superficiale de sarcina ρ_S cu viteza $\bar{v}$, se va defini o distribuţie superficială de curent (pânza de curent) cu densitatea:

$$\bar{J}_S = \rho_S\ \bar{v}\ \left[\frac{A}{m}\right] \qquad (2.31)$$

La fel cum şi pentru curentul de conducţie există “pânză de curent” atunci când liniile de curent sunt conţinute pe o suprafaţa subţire (la suprafaţa conductorului sau pe o discontinuitate interioară).

c) *Curentul de deplasare*

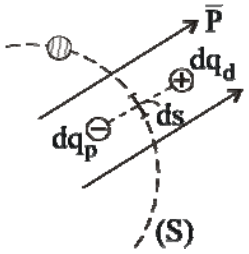


Fig 2.16

La variația în timp a câmpului $\overline{E}$, variază şi polarizația $\overline{P}$, care va antrena o mişcare a particulelor elementare infinitezimale şi orice mişcare de sarcini înseamnă curent electric. Dar în dielectrici sarcinile nu sunt libere, ele pot numai să se deplaseze limitat, acest curent numindu-se *curent de deplasare*.

O particulă (cea haşurată) aşezată pe suprafața S din dielectric (figura 2.16) este neutră. Ca urmare a polarizării substanței ea se transformă într-un dipol electric, sarcina dipolară dq_d s-a deplasat prin suprafața ds. Conform cu (2.15) sarcina dipolară cu expresia $dq_d = \overline{P}\ \overline{ds}$ determină curentul:

$$di_d = \frac{dq_d}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overline{P}\ \overline{ds}\right) = \frac{d\overline{P}}{dt}\overline{ds} = \overline{J}_d'\ \overline{ds} \qquad (2.32)$$

Mărimea $\overline{J}_d' = \frac{d\overline{P}}{dt}$ este *densitatea curentului de deplasare în substanță.*

Din legea legăturii în câmp electric (2.19): $\overline{D} = \varepsilon_o \overline{E} + \overline{P}$, dacă o derivăm în raport cu timpul, vom obține:

$$\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} = \varepsilon_o \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{P}}{\partial t} \qquad (2.33)$$

Fiecare termen din (2.33) are dimensiunea unei densități de curent:

$$\begin{cases} \overline{J}_{d_o} = \varepsilon_o \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t} = \dfrac{\partial \overline{D}_o}{\partial t} & \text{- este densitatea curentului de deplasare în vid} \\ \overline{J}_d = \dfrac{\partial \overline{D}}{\partial t} & \text{- este densitatea curentului (total) de deplasare} \end{cases}$$

Componenta $\overline{J}_{d_o}$, în stadiul actual al ştiinței, nu are o interpretare foarte explicită; acest curent de deplasare în vid nu are multe dintre atributele unui curent (fiind în vid el nu este însoțit de nici o mişcare de sarcini electrice sau de corpuri încărcate, nu produce căldură – vidul nu are o astfel de caracteristică) dar are caracteristica fundamentală a oricărui curent – aceea de a produce câmp magnetic în jurul său. De altfel, prin acest curent se propagă unda electromagnetică prin vid, câmpul electric variabil $\varepsilon_o \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$ produce câmp magnetic în jurul său.

Densitatea curentului de deplasare $\bar{J}_d = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ nu are direcția câmpului $\bar{D}$, ci are direcția variației lui $\bar{D}$, respectiv ($d\bar{D}$) ca în figura 2.17.

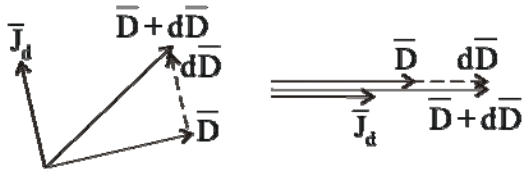


Fig 2.17

Observație:

În afară de curenții electrici de conducție, convecție şi deplasare, mai există *curentul electric de tip Röntgen* (vezi relația 3.34), creat prin mişcarea cu viteza $\bar{v}$ a corpurilor polarizate, el este creat de sarcinile fictive de polarizație în mişcarea lor odată cu corpul. Densitatea acestui curent este :

$$\bar{J}_R = \mathrm{rot}\left(\bar{D} \times \bar{v}\right) \tag{2.34}$$

Dimensional: $$\left[\bar{J}_R\right] = [\mathrm{rot}][D][v] = \frac{1}{m}\frac{C}{m^2}\frac{m}{s} = \frac{A}{m^2} \tag{2.35}$$

2.4 Starea de magnetizare a corpurilor

Starea de magnetizare a unui corp de dimensiuni mici este caracterizată printr-o mărime primitivă vectorială: $\bar{m}$ - *momentul magnetic*. Direcția lui $\bar{m}$ e direcția de magnetizare a corpului.

Corpul magnetizat de moment $\bar{m}$ introdus într-un câmp exterior de inducție $\bar{B}$ va fi supus unor acțiuni ponderomotoare (forțe, cupluri) de către acesta:

$$\begin{cases} \bar{C} = \bar{m} \times \bar{B} \\ \bar{F} = \mathrm{grad}(\bar{m}\ \overset{\downarrow}{\bar{B}}) \end{cases} \tag{2.36}$$

analog cu acțiunile unui câmp electric $\bar{E}$ asupra unui corp polarizat (2.11)

Sub acțiunea cuplului $\bar{C}$ corpul magnetizat va fi rotit pe direcția câmpului $\bar{B}$, această orientare la nivel micro este interpretată la nivel macro prin *magnetizarea corpului pe direcția câmpului* $\bar{B}$. La fel ca momentul elecric $\bar{p}$ şi momentul magnetic $\bar{m}$, poate avea o componentă temporară şi una permanentă: $\bar{m} = \bar{m}_t + \bar{m}_p$.

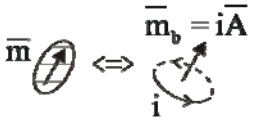


Fig 2.18

Un mic corp magnetizat de moment $\bar{m}$ poate fi echivalat cu o buclă de curent (figura 2.18) dacă au acelaşi moment magnetic: $\bar{m}=\bar{m}_b$. Momentul unei bucle de curent este:

$$\bar{m}_b = i\,\bar{A} \tag{2.37}$$

unde i este curentul din buclă iar $\bar{A}$ este aria orientată a buclei (în raport cu sensul curentului din buclă).

Dimensional:
$$\begin{cases} [m]=[m_b]=[i]\ [A]=A\,m^2 \\ [m]=\dfrac{[C]}{[B]}=\dfrac{N\,m}{N/A\,m}=A\,m^2 \end{cases} \tag{2.38}$$

Starea de magnetizare a unui corp masiv (privit ca o reuniune de mici corpuri, fiecare având momentul $\bar{m}$) într-un punct P din volumul său este caracterizată prin densitatea momentelor magnetice din jurul punctului P:

$$\bar{M}=\frac{d\bar{m}}{d\upsilon} \tag{2.39}$$

Mărimea aceasta $\bar{M}$ se numeşte *magnetizaţia corpului* şi ea caracterizează local starea de magnetizare din orice punct interior P.

Dimensional: $$[M]=\frac{[dm]}{[d\upsilon]}=\frac{A\,m^2}{m^3}=\frac{A}{m} \tag{2.40}$$

Dacă $\bar{M}$ = ct, avem un corp uniform magnetizat, iar dacă se cunoaşte $\bar{M}$ în orice punct din corp, atunci momentul magnetic al corpului va fi:

$$\bar{m}_{corp}=\int_{V_{corp}} \bar{M}\,d\upsilon \tag{2.41}$$

Curentul i care parcurge bucla echivalentă poartă numele de *curent de magnetizare* sau *curent amperian*.

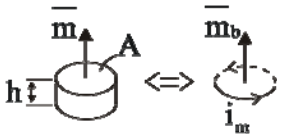


Fig 2.19

Momentul magnetic al unui mic corp cilindric de înălţime h este:

$$\begin{cases} m = M\,\upsilon = M\,A\,h \\ m_b = i_m A \text{ - momentul buclei echivalente} \end{cases} \tag{2.42}$$

Deci curentul amperian are valoarea: $i_m = M\,h$.

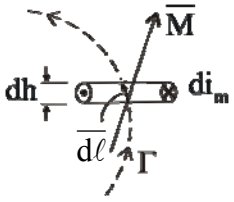


Fig 2.20

Pentru un corp masiv, un element infinitezimal cu înălţimea dh va avea echivalent curentul amperian (figura 2.20):

$$di_m = M\,dh = \bar{M}\,d\bar{\ell} \tag{2.43}$$

Curentul amperian, prin suprafața curbei Γ (figura 2.20) este dat de toate buclele elementare tăiate de curba Γ:

$$i_{m_\Gamma} = \oint_\Gamma \bar{M}\, \overline{d\ell} \tag{2.44}$$

Pentru corpuri magnetizate neuniform, valoarea locală a densității curentului amperian este:

$$\underbrace{\int_{S_\Gamma} \bar{J}_m\, \overline{ds}}_{i_{m_\Gamma}} = \oint_\Gamma \bar{M}\, \overline{d\ell} \;\leftrightarrow\; \bar{J}_m = \text{rot}\, \bar{M} \tag{2.45}$$

Pe suprafața corpului magnetizat (care este o discontinuitate pentru $\bar{M}$) se poate defini o repartiție superficială de curent (pânză de curent):

$$\bar{J}_{m_S} = \text{rot}_s\, \bar{M} = \bar{n}_{12} x (\bar{M}_2 - \bar{M}_1) = \bar{M}_{t_2} - \bar{M}_{t_1} \tag{2.46}$$

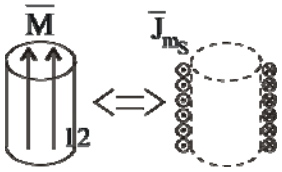


Fig 2.21

care apare ca o bobină cu spire foarte subțiri aşezate pe suprafața corpului (figura 2.21). Dacă în exterior $\bar{M}_{t_2} = 0$ atunci intensitatea pânzei de curent este: $\bar{J}_{m_S} = \bar{M}_{t_1}$.

Observație:

1. Analogia unui mic corp magnetizat cu o buclă de curent (introdusă de Ampere.) este adevarată şi azi, la nivel micro. Un electron descrie o orbită (o buclă orbitală cu momentul orbital $\bar{m}_o$) dar şi o mişcare de spin în jurul orbitei (care determină un moment magnetic de spin $\bar{m}_s$. Suma vectorială a acestora ne dă momentul magnetic al unui atom.

2. Materialele *diamagnetice* (cupru, bronz, etc) n-au moment magnetic inițial. Câmpul $\bar{B}_{ext}$ le induce un moment magnetic (de sens opus cu $\bar{B}_{ext}$). Ele slăbesc câmpul $\bar{B}_{ext}$.

Materialele *paramagnetice* (Al) au momente spontane $\bar{m}$ pe care câmpul $\bar{B}_{ext}$ le orientează pe direcția sa. Aceste materiale întăresc câmpul exterior $\bar{B}_{ext}$.

2.5 Stările câmpului electric şi magnetic

Explorarea unui câmp electric se face cu un mic *corp de probă* conductor încărcat cu sarcina q. Corpul de probă trebuie să fie mic pentru a explora câmpul electric punctual (altfel fac media pe o regiune în jurul punctului) iar q să fie mic pentru ca prin câmpul său propriu, corpul de probă să nu modifice valoarea câmpului de explorat:

$$\bar{F}_e = q\, \bar{E} \tag{2.47}$$

Sarcina q are unitatea de măsură stabilită experimental prin alte metode [q]= C, iar din relația (2.47) rezultă:

$$[E]=\frac{[F]}{[q]}=\frac{N}{C}\doteq\frac{V}{m} \tag{2.48}$$

În orice punct dintr-un domeniu, câmpul electric $\bar{E}$ defineşte local starea câmpului electric din acel punct.

Explorarea unui câmp magnetic se poate face cu un corp de probă care poate fi o sarcină q în mişcare cu viteza $\bar{v}$.

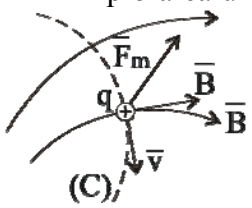


Fig 2.22

Dacă în regiune există şi câmp electric, acesta va exercita o forță electrică $\bar{F}_e = q\,\bar{E}$, iar câmpul magnetic $\bar{B}$ va acționa cu o forță magnetică tip Lorentz:

$$\bar{F}_m=q\left(\bar{v}\times\bar{B}\right) \tag{2.49}$$

În repaus măsurăm forța electrică $\bar{F}_e$, iar în mişcare măsurăm:

$$\bar{F}_t=q\,\bar{E}+q\left(\bar{v}\times\bar{B}\right) \tag{2.50}$$

Forța suplimentară, forța magnetică $\bar{F}_m$, este cea care apare la mişcarea sarcinii pe curba C cu viteza $\bar{v}$ (figura 2.22)

Mărimea explorată $\bar{B}$ definită printr-un produs vectorial (2.49) îi atribuie lui $\bar{B}$ caracterul de *vector axial,* spre deosebire de $\bar{E}$ care are caracter de *vector polar*. Explorarea mărimii $\bar{B}$ se poate face şi pe baza altor experimente:

$$d\bar{F}=i\left(\overline{d\ell}\times\bar{B}\right)\qquad\text{sau}\qquad\bar{C}=\bar{m}_b\times\bar{B} \tag{2.51}$$

Toate aceste moduri de definire pentru $\bar{B}$ sunt echivalente între ele.

Dimensional pentru inducția magnetică rezultă unitatea de măsură din relația sa de definiție:

$$\begin{cases} d\bar{F}=i\left(\overline{d\ell}\times\bar{B}\right)\longrightarrow[B]=\dfrac{[dF]}{[i][d\ell]}=\dfrac{N}{A\,m}=T(\text{Tesla}) \\ \bar{C}=\bar{m}\times\bar{B}\qquad\longrightarrow[B]=\dfrac{[C]}{[m]}=\dfrac{N\,m}{A\,m^2}=T=\dfrac{1Wb}{m^2} \end{cases} \tag{2.52}$$

Observație:

Ca orice formă de materie, câmpul electromagnetic are energie şi impuls pe care le poate transmite corpurilor cu care este în contact. Deosebirea față de substanța corpurilor constă în faptul că pentru câmp nu este proprie starea de mişcare mecanică.

În vid un câmp magnetic este univoc determinat prin inducția sa magnetică $\bar{B}$ în orice punct. În interiorul corpurilor materiale, sub influența câmpului magnetic exterior substanța corpului se magnetizează şi va

modifica valoarea câmpului. Într-un punct din substanță câmpul magnetic este caracterizat printr-o pereche de mărimi $\bar{B}$ şi $\bar{H}$:

$\bar{B}$ - *inducția magnetică* în punctul P este valoarea câmpului ce exista în punctul P înainte de a plasa corpul, având o substanță de permeabilitate μ şi este creat de surse externe corpului.

$\bar{H}$ - *intensitatea câmpului magnetic* în punctul P şi este o caracteristică a câmpului ce ține seama de modificarea pe care substanța corpului a adus-o câmpului inițial.

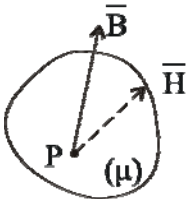


Fig 2.23

Dacă materialul corpului este izotrop, cei doi vectori sunt coliniari iar dacă este anizotrop (figura 2.23) atunci $\bar{B}$ şi $\bar{H}$, în orice punct P, fac un unghi între ei.

Între cele două mărimi de stare ale câmpului magnetic din interiorul corpurilor există o legătură:

$$\bar{B}=\mu_o\left(\bar{H}+\bar{M}\right) \tag{2.53}$$

numită *legea legăturii în câmp magnetic* (sau legea legăturii dintre mărimile $\bar{B}$-inducția magnetică, $\bar{H}$-intensitatea câmpului magnetic şi $\bar{M}$-magnetizația corpului).

3. Legile fenomenelor electromagnetice

Studiul fenomenelor electromagnetice este mai dificil decât al altor fenomene fizice (mecanică, căldură, optică, acustică) deoarece omul nu este înzestrat cu simțuri speciale pentru perceperea directă a acestor fenomene (doar undele electromagnetice cu λ=(0.4–0.6) μm sunt perceptibile sub forma undelor luminoase).Studiul fenomenelor electromagnetice se face indirect, determinând câmpul să se manifeste prin forțe, cupluri, reacții chimice, etc pe care să le percepem şi să le putem măsura.

Fenomenul electromagnetic va fi privit unitar din punct de vedere macroscopic când toate acțiunile pe care le mijloceşte câmpul electromagnetic se transmit cu viteză finită, prin contiguitate (din aproape în aproape, în timp şi spațiu). Toate acțiunile transmise prin câmp sunt întârziate, având nevoie de timp pentru a se propaga.

Această teorie despre câmpul electromagnetic a fost inițiată de Faraday, a fost desăvarşită de Maxwell pentru corpuri imobile şi a fost completată de Hertz pentru corpuri mobile. Este o teorie fenomenologică – *teoria macroscopică clasică* – care consideră mediile corporale ca fiind continuie şi nu abordează sistemele fizice la scară atomică (doar anumitor aspecte le vom da o explicație microscopică pentru a le înțelege mai bine semnificația).

Între mărimile fizice ale unui domeniu al ştiinței se pot stabili relații de legatură de două feluri:

legi – acele relații care exprimă cele mai generale cunoştințe despre fenomenele unui domeniu al ştiinței, stabilite pe cale experimentală pe baza cercetării domeniului şi care nu se pot deduce logic din alte cunoştințe mai generale; numărul lor este fix în orice domeniu al ştiinței.

teoreme – acele relații care se pot deduce logic plecând de la legi. Ele vizează aspecte particulare şi servesc la soluționarea unor probleme practice, pentru a nu fi nevoiți să apelăm la legi de fiecare dată.

Legile teoriei macroscopice a fenomenelor electromagnetice sunt:

legi generale: valabile în orice sistem fizic; ele nu conțin în expresia lor decât constante universale.

legi de material: în expresia lor apar constante (coeficienți) care au valori specifice pentru fiecare material ce intră în componența corpurilor ce alcătuiesc sistemul.

Legile au *forme integrale* (valabile pe un anumit domeniu) şi *forme locale* (valabile într-un punct din domeniu).

3.1 Legea fluxului electric

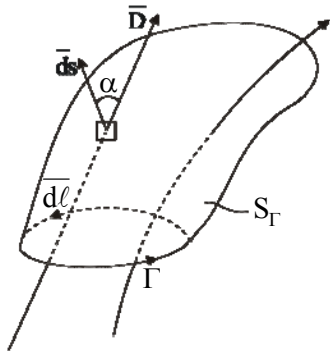


Fig 3.1

Fluxul electric este o mărime electrică derivată, asociată cu inducția electrică $\overline{D}$. Fluxul electric printr-o suprafață deschisă S_Γ (care se sprijină pe curba Γ) este definit prin:

$$\psi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{D}\,\overline{ds} = \int D ds \cos\alpha \qquad (3.1)$$

Orientarea lui $\overline{ds}$ (deci a suprafeței S_Γ) depinde de orientarea elementului $\overline{d\ell}$ al curbei Γ (figura 3.1).

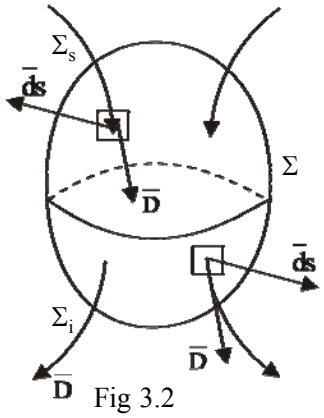


Fig 3.2

Fluxul printr-o suprafață închisă Σ (figura 3.2) pe care o considerăm întotdeauna orientată după normala sa exterioară, se poate descompune în fluxul prin emisfera superioară Σ_s şi fluxul prin emisfera inferioară Σ_i, cele doua emisfere fiind separate prin planul ecuatorial.

$$\psi_\Sigma = \int_{\Sigma_s} \overline{D}\,\overline{ds} + \int_{\Sigma_i} \overline{D}\,\overline{ds} = \psi_s^- + \psi_i^+ \quad (3.2)$$

În emisfera superioară intră liniile lui $\overline{D}$, ungiul dintre $\overline{D}$ şi $\overline{ds}$ este obtuz şi $\psi_s = \int_{\Sigma_s} \overline{D}\,\overline{ds} < 0$ iar prin emisfera inferioară ies liniile lui $\overline{D}$, unghiul dintre $\overline{D}$ şi $\overline{ds}$ este ascuțit şi $\psi_i = \int_{\Sigma_i} \overline{D}\,\overline{ds} > 0$. Cum fluxul Ψ_Σ este suma de doi termeni unul (+) şi altul (–) vom avea:

$$\psi_\Sigma = \psi_s^- + \psi_i^+ = \begin{cases} + & \text{dacă } \psi_i > |\psi_s|, \text{ ies mai multe linii a lui } \overline{D} \text{ decât intră} \\ 0 & \text{dacă } \psi_i = |\psi_s|, \text{ atâtea ies pe jos câte linii au intrat pe sus} \\ - & \text{dacă } \psi_i < |\psi_s|, \text{ ies mai puține linii decât au intrat} \end{cases}$$

Dintr-o suprafață închisă Σ pot să iasă mai multe linii de câmp decât au intrat numai dacă în volumul limitat de Σ (ν_Σ) există surse pozitive care generează noi linii de câmp. Ies mai puține linii de câmp numai dacă în ν_Σ

există surse negative (puțuri) care absorb liniile de câmp, respectiv ies atâtea linii câte au intrat dacă în ν_Σ nu există nici o sursă sau productivitatea surselor (+) este egală cu productivitatea surselor (–).

Deci între fluxul electric printr-o suprafață închisă Σ şi distribuția surselor în interiorul suprafeței Σ există o legătură. Dar sursele unui câmp electric sunt sarcinile electrice. Legea fluxului electric face legătura dintre fluxul electric prin Σ şi sarcinile conținute în interiorul acestei suprafețe:

$$\int_\Sigma \overline{D}\,\overline{ds} = q_\Sigma \qquad (3.3)$$

Expresia (3.3) reprezintă *forma integrală* a legii fluxului electric şi spune că „fluxul electric printr-o suprafață închisă Σ, oarecare, este egal numeric cu sarcina electrică conținută în interiorul lui Σ".

Expresia legii (3.3) este valabilă în orice sistem şi în orice regim de funcționare, deci este o lege generală. Valoarea sarcinii q_Σ conține doar sarcinile interioare q_i, al căror câmp $\overline{D}_1$ produce flux prin Σ. O sarcină exterioară q_e (figura 3.3) creează câmpul $\overline{D}_2$ care nu contribuie la fluxul Ψ_Σ (unele linii înțeapă suprafața Σ de două ori, cu (–) la intrare şi cu (+) la ieşire iar altele nu o înțeapă niciodată).

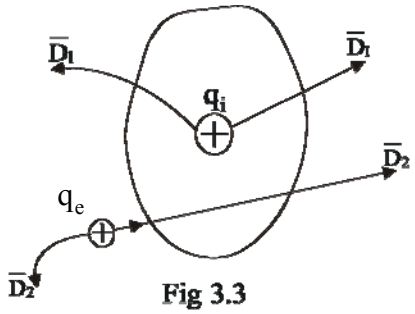


Fig 3.3

Considerând sarcina q_Σ repartizată în interiorul volumului ν_Σ cu densitatea ρ_v, astfel încât $\rho_v \neq 0$ în regiunile unde există efectiv corpuri încărcate cu sarcină şi $\rho_v = 0$ în spațiul dintre corpuri, atunci:

$$\left.\begin{aligned} q_\Sigma &= \int_{\nu_\Sigma} \rho_v d\nu \\ \int_\Sigma \overline{D}\,\overline{ds} &= \int_{\nu_\Sigma} \operatorname{div}\overline{D}\, d\nu \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\nu_\Sigma = \text{arbitrar}} \operatorname{div}\overline{D} = \rho_v \qquad (3.4)$$

Relația (3.4) constituie *forma locală* a legii fluxului electric. Cum divergența unui câmp indică sursele acelui câmp, legea (3.4) arată că sursele campului $\overline{D}$ sunt distribuțiile de sarcină ρ_v: liniile lui $\overline{D}$ încep pe sarcinile (+) şi se termină pe sarcinile (–). Cartezian expresia (3.4) se scrie sub forma:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho_v(x,y,z) \qquad (3.5)$$

În domeniile neîncărcate cu sarcină unde $\rho_v=0$, liniile lui $\overline{D}$ trec continuu, nici nu apar nici nu dispar linii ale câmpului $\overline{D}$.

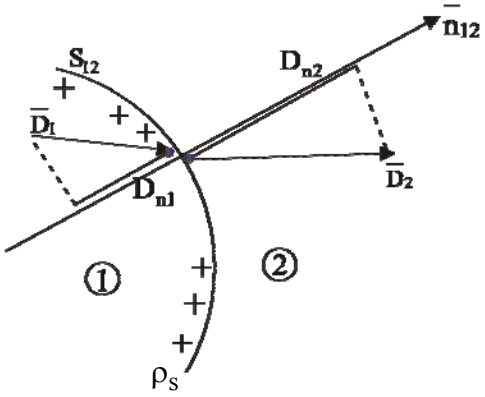


Fig 3.4

Dacă suprafața de trecere S_{12} dintre mediile ① şi ② (deci S_{12} este o discontinuitate) este încărcată cu distribuția superficială de sarcină ρ_S (*discontinuitate activă*), atunci aplicând (3.4) în punctele din jurul discontinuității vom avea:

$$\text{div}_S\overline{D}=\rho_S \quad\rightarrow\quad \bar{n}_{12}\cdot(\overline{D}_2-\overline{D}_1)=\rho_S \quad\rightarrow\quad D_{n_2}-D_{n_1}=\rho_S \qquad (3.6)$$

Cum $\rho_S>0 \quad\rightarrow\quad D_{n_2}>D_{n_1}$, ca în figura 3.4.

Dacă S_{12} este o *discontinuitate pasivă* ($\rho_S=0$) atunci:

$$D_{n_1}=D_{n_2} \qquad (3.7)$$

respectiv la trecerea printr-o joncțiune pasivă ($\rho_S=0$) liniile lui $\overline{D}$ astfel se refractă încât se conservă componenta normală a lui $\overline{D}$.

Relațiile (3.4), (3.6) şi (3.7) sunt formele locale ale legii în domenii de continuitate sau de discontinuitate.

Observații:

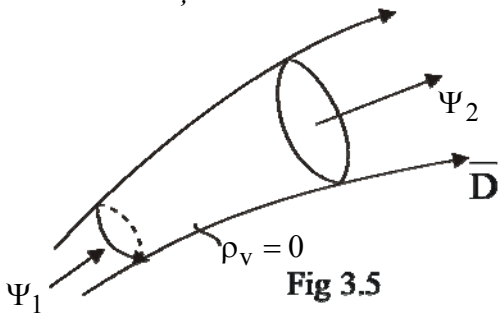


Fig 3.5

- Liniile lui $\overline{D}$ care trec printr-o suprafață limitată de un contur (figura 3.5) formează un *tub de flux electric.* Cum în interiorul tubului nu există sarcini $\rho_v=0$, rezultă că $\psi_1=\psi_2$, deci printr-un tub de flux, fluxul este *conservativ.*

„*Tub unitate*" este acela a cărui suprafață este străbătută de unitatea de flux. Fiecare tub unitate este înlocuit cu o linie a câmpului $\overline{D}$ care coincide cu axa tubului, obținând astfel *spectrul liniilor* lui $\overline{D}$. Din acest motiv fluxul printr-o suprafață este

definit ca *numărul liniilor de câmp care străbat suprafața* respectivă, fiecare linie ține loc de un tub unitar de flux. Când liniile nu înțeapă o suprafață , fluxul este zero.

- Din relația (3.3) $\psi_\Sigma = \int_\Sigma \overline{D}\,\overline{ds} = q_\Sigma$ rezultă dimensional:

$$\begin{cases} [\Psi_\Sigma] = [q_\Sigma] = C \\ [D] = \dfrac{[q_\Sigma]}{[S]} = \dfrac{C}{m^2} \end{cases} \tag{3.8}$$

- *Formele integrale* ale unei legi (valabile pe un domeniu) se pot verifica experimental iar *formele locale* (valabile într-un punct din domeniu) stau la baza algoritmilor de calcul a unui câmp.
- Dacă suprafața Σ trece doar prin mediu continuu cu $\varepsilon = ct$ (unde $\overline{D} = \varepsilon\overline{E}$), atunci legea se scrie succesiv:

$$\int_\Sigma \overline{D}\,\overline{ds} = \int_\Sigma \varepsilon\,\overline{E}\,\overline{ds} = \varepsilon\int_\Sigma \overline{E}\,\overline{ds} = q_\Sigma \quad \Rightarrow \quad \int_\Sigma \overline{E}\,\overline{ds} = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon} \tag{3.9}$$

Forma particulară (3.9) a legii fluxului electric, pentru domenii de continuitate este cunoscută sub numele de *teorema lui Gauss*. Forma locală asociată expresiei (3.9) este:

$$\operatorname{div}\overline{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{3.10}$$

Dacă mediul cu ε a fost înlocuit prin sarcinile de polarizație echivalente ($\rho_{v_p} = -\operatorname{div}\overline{P}$), atunci din legea legăturii (2.19) se obține:

$$\operatorname{div}\overline{E} = \frac{\operatorname{div}\overline{D} - \operatorname{div}\overline{P}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho_v + \rho_{v_p}}{\varepsilon_o} \tag{3.11}$$

Deci în vid (ε_o), sursele câmpului $\overline{E}$ sunt atât sarcinile reale ρ_v cât şi sarcinile de polarizație ρ_{v_p}.

- Plecând de la formele integrale (3.3) şi (3.10) se pot stabili algoritmi de calcul pentru câmpul $\overline{D}$ (respectiv $\overline{E}$) dacă intuiesc apriori forma liniilor lui $\overline{D}$ (respectiv $\overline{E}$) şi aleg suprafața Σ în concordanță cu geometria liniilor de câmp.

Suprafața Σ se alege astfel:

a) să fie ortogonală câmpului $\overline{D}$ (respectiv $\overline{E}$):

$$\overline{D}\,\overline{ds} = D\,ds \;\; ; \;\; (\overline{E}\,\overline{ds} = E\,ds) \tag{3.12}$$

b)să fie o suprafață de câmp constant: $D|_\Sigma = ct$; ($E|_\Sigma = ct$) (3.13)

În ipotezele (3.12) şi (3.13) calculul integralei de flux din (3.3) se simplifică astfel:

$$\int_\Sigma \overline{D}\,\overline{ds} \underset{(a)}{\uparrow} = \int_\Sigma Dds \underset{(b)}{\uparrow} = D\int_\Sigma ds = D\cdot A_\Sigma = q_\Sigma \Rightarrow D = \frac{q_\Sigma}{A_\Sigma};\ \left(E = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon A_\Sigma}\right) \quad (3.14)$$

• Pentru o piesă conductoare încărcată superficial cu distribuția de sarcină ρ_S, în interiorul său nu există câmp ($\overline{D}_1 = 0$) iar în exterior câmpul este $D_2 = D_{n_2}$, normală la suprafața conductorului, atunci forma locală (3.6) aplicată pe suprafața unei piese conductoare devine:

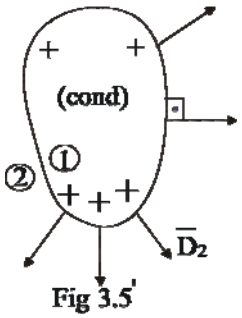


Fig 3.5'

$$D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_S \xrightarrow[D_{n_1}=0]{} D_2 = D_{n_2} = \rho_S \quad (3.15)$$

Valoarea inducției electrice $\overline{D}$ lângă un corp conductor este egală cu valoarea locală a lui ρ_S iar ca vector este $\perp$ pe suprafața corpului conductor.

Aplicații:

1. O sarcină punctiformă q este situată în vid (figura 3.6). Se cere expresia câmpului electric creat în jurul său.

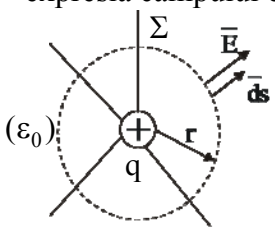


Fig 3.6

Câmpul electric este *radial* (liniile lui $\overline{E}$ în lungul vectorului de poziție $\bar{r}$) cu simetrie sferică (simetria unui câmp este dată de forma suprafețelor sale echipotențiale). Aplicând legea fluxului electric sub forma (3.14) pe suprafață Σ sferă de rază r obținem:

$$\int_\Sigma \overline{D}\,\overline{ds} = q_\Sigma \leftrightarrow D\cdot 4\pi r^2 = q \rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \rightarrow \overline{D} = \frac{q}{4\pi}\,\frac{\bar{r}}{r^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon_o} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{\bar{r}}{r^3}$$

2. O sferă dielectrică de rază a şi permitivitate $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_o$ este încărcată uniform cu sarcina q ($\rho_v = \frac{q}{V} = \frac{3q}{4\pi a^3}$) şi plasată în vid. Se cere expresia câmpului creat.

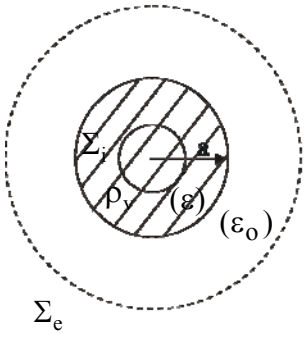


Fig 3.7

Atât în interiorul sferei ($r < a$) cât şi în exteriorul său, câmpul electric este radial cu simetrie sferică; deci vom alege suprafețe Σ sfere atât pentru interior (Σ_i) cât şi pentru exterior (Σ_e) de forma unor sfere (ortogonale pe liniile de câmp) ca în figura 3.7

→Pe domeniul interior ($r < a$) rezulttă:

$$\int_{\Sigma_i} \overline{D}_i \, \overline{ds} = q_{\Sigma_i} \quad \leftrightarrow \quad D_i 4\pi r^2 = \rho_v \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\rightarrow \; D_i = \frac{1}{3}\rho_v r \quad \rightarrow \quad \overline{D}_i = \frac{1}{3}\rho_v \bar{r} \quad \rightarrow \quad \overline{E}_i = \frac{\rho_v}{3\varepsilon}\bar{r}$$

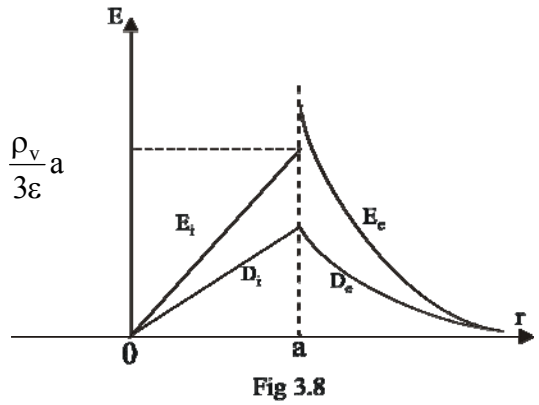


Fig 3.8

→Pe domeniul exterior ($r \geq a$) vom avea:

$$\int_{\Sigma_e} \overline{D}_e \, \overline{ds} = q_{\Sigma_e} \leftrightarrow \; D_e 4\pi r^2 =$$

$$= \rho_v \frac{4\pi a^3}{3} \quad \rightarrow D_e = \frac{\rho_v a^3}{3}\frac{1}{r^2} \rightarrow$$

$$\overline{D}_e = \frac{\rho_v a^3}{3}\frac{\bar{r}}{r^3} \quad \rightarrow \quad \overline{E}_e = \frac{\rho_v a^3}{3\varepsilon_o}\frac{\bar{r}}{r^3}$$

Suprafața sferei de rază a este o discontinuitate (în interior este ε şi în exterior ε_o) deci valoarea lui E suferă un salt. În schimb:

$$(D_i)_{r=a} = \frac{\rho_v}{3}a = (D_e)_{r=a}$$

deci valorile câmpului D nu sunt afectate de discontinuitatea mediului, ca în figura 3.8.

3. Un fir rectiliniu foarte lung este încărcat uniform cu densitatea liniară $\rho_\ell [C/m]$. Se cere expresia câmpului electric creat.

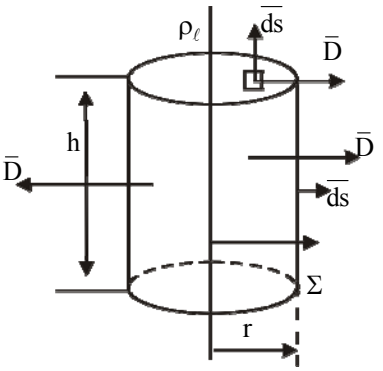


Fig 3.9

Câmpurile $\overline{D}$ şi $\overline{E}$ sunt radiale cu simetrie cilindrică, deci şi suprafaţa Σ o alegem un cilindru de rază r şi lungime h (figura 3.9).

$$\int_{\Sigma} \overline{D}\,\overline{ds} = \int_{\Sigma_{lat}} \overline{D}\,\overline{ds} + 2\int_{\Sigma_{bază}} \underbrace{\overline{D}\,\overline{ds}}_{=0} =$$

$$= D \cdot 2\pi rh = q_{\Sigma} = \rho_{\ell} h \quad \Rightarrow D = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi}\frac{1}{r} \quad \Rightarrow$$

$$\overline{D} = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi}\frac{\bar{r}}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\bar{r}}{r^2}$$

4. Un cilindru dielectric foarte lung şi de rază a este încărcat uniform cu sarcină având densitatea ρ_v. Se cere expresia câmpului creat în interiorul şi exteriorul său (figura 3.10).

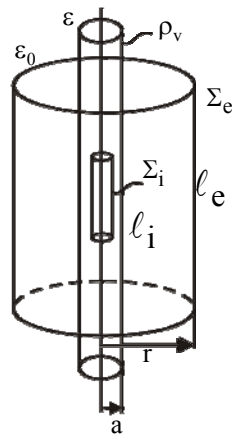


Fig 3.10

Câmpurile $\overline{D}$ şi $\overline{E}$ sunt radiale cu simetrie cilindrică:

→ Pentru interiorul cilindrului r < a :

$$\int_{\Sigma_i} \overline{D}\,\overline{ds} = q_{\Sigma_i} \quad \leftrightarrow \quad D_i 2\pi r\ell_i = \rho_v \pi r^2 \ell_i$$

$$\rightarrow \quad D_i = \frac{\rho_v}{2} r \;\rightarrow\; \overline{D}_i = \frac{\rho_v}{2}\bar{r} \quad \rightarrow \quad \overline{E}_i = \frac{\rho_v}{2\varepsilon}\bar{r}$$

→Pentru exteriorul cilindrului (r ≥ a) rezultă succesiv:

$$\int_{\Sigma_e} \overline{D}\,\overline{ds} = q_{\Sigma_e} \quad \leftrightarrow \quad D_e 2\pi r\ell_e = \rho_v \pi a^2 \ell_e$$

$$\rightarrow D_e = \frac{\rho_v a^2}{2}\frac{1}{r} \;\rightarrow\; \overline{D}_e = \frac{\rho_v a^2}{2}\frac{\bar{r}}{r^2} \;\rightarrow \overline{E}_e = \frac{\rho_v a^2}{2\varepsilon_o}\frac{\bar{r}}{r^2}$$

5. O sferă conductoare de rază a este încărcată superficial cu sarcina q şi este situată jumătate într-un mediu cu ε_1 iar cealaltă jumătate într-un mediu cu ε_2. Se cer expresiile câmpului electric creat şi densităţile de sarcină pe cele două emisfere.

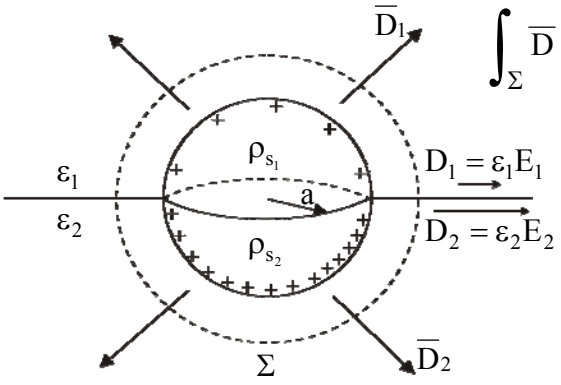


Fig 3.11

$$\int_\Sigma \overline{D}\,\overline{ds} = q_\Sigma \quad \leftrightarrow \quad (D_1 + D_2)2\pi r^2 = q$$

În plan ecuatorial este discontinuitate, unde se conservă componenta tangențială a lui $\overline{E}$:

$$E_1 = E_2 \rightarrow \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{D_2}{\varepsilon_2}$$

$$D_1 2\pi r^2\left(1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) = q \rightarrow D_1 = q\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{2\pi r^2} \rightarrow E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1}$$

$$D_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}D_1 = q\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{2\pi r^2} \rightarrow E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2}$$

Distribuția sarcinii pe cele două emisfere conform relației (3.15) va fi:

$$\begin{cases} \rho_{s_1} = (D_1)_{r=a} = q\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{1}{2\pi a^2} \\ \rho_{s_2} = (D_2)_{r=a} = q\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{1}{2\pi a^2} \end{cases} \Rightarrow \quad (\rho_{s_1} + \rho_{s_2})2\pi a^2 = q$$

3.2 Legea fluxului magnetic

Sub formă integrală legea spune că: „fluxul magnetic printr-o suprafață închisă Σ este nul în orice regim de funcționare, indiferent ce formă are Σ”.

$$\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \overline{B}\,\overline{ds} = 0 \qquad (3.16)$$

Forma integrală (3.16) a legii pune în evidență *caracterul conservativ* al fluxului magnetic; fluxul care intră printr-o parte a suprafeței închise Σ este egal cu fluxul care iese prin altă parte, iar fluxul printr-o suprafață deschisă S_Γ depinde doar de forma curbei Γ.

În domenii de continuitate a câmpului $\overline{B}$ se poate scrie, cu teorema lui Gauss:

$$\int_{\Sigma} \overline{B}\,\overline{ds} = \int_{v_\Sigma} \operatorname{div}\overline{B}\,dv = 0 \quad \xrightarrow[v_\Sigma = \text{arbitrar}]{} \quad \operatorname{div}\overline{B} = 0 \tag{3.17}$$

Expresia (3.17) reprezintă *forma locală* a legii fluxului magnetic. Cum în orice punct din spațiu $\operatorname{div}\overline{B} = 0$, înseamnă că liniile inducției magnetice $\overline{B}$ sunt întotdeauna *linii închise* (sau sunt un fascicul paralel de linii de câmp). Deci câmpul $\overline{B}$ este un câmp fără surse (nu există *sarcini magnetice* care ar produce câmpul magnetic) şi este numit *câmp solenoidal.*

Dacă $\operatorname{div}\overline{B} = 0$ înseamnă că funcția vectorială $\overline{B}$ provine prin intermediul rotorului dintr-un *potențial magnetic vector* $\overline{A}$ (conform relației 1.15):

$$\overline{B} = \operatorname{rot}\overline{A} \tag{3.18}$$

Potențialul vector $\overline{A}$ este o mărime vectorială *de calcul*, nu are o semnificație fizică; el se foloseşte doar pentru a creea algoritmi de calcul ai câmpului magnetic mult mai simpli. Ca orice funcție vectorială, potențialul $\overline{A}$ este univoc determinat dacă alături de rotorul său (3.18) se cunoaşte şi divergența sa (numită *condiția de etalonare*). În regim staționar şi cvasistaționar se adoptă o condiție de etalonare *de tip Coulomb*:

$$\operatorname{div}\overline{A} = 0 \tag{3.19}$$

Cu ajutorul potențialului $\overline{A}$, fluxul magnetic printr-o suprafață deschisă S_Γ care se sprijină pe curba închisă Γ se poate exprima astfel:

$$\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{B}\,\overline{ds} = \int_{S_\Gamma} \operatorname{rot}\overline{A}\,\overline{ds} = \oint_{\Gamma} \overline{A}\,\overline{d\ell} \tag{3.20}$$

Deci pentru a calcula un flux magnetic Φ_{S_Γ} trebuie cunoscute fie valorile lui $\overline{B}$ în toate punctele suprafeței S_Γ, fie valorile potențialului $\overline{A}$ doar în punctele conturului Γ, problemă mult mai simplă; deci fluxul Φ_{S_Γ} depinde doar de forma curbei Γ. Forma locală (3.17) este valabilă doar în domenii de continuitate ale mediului, deci ale câmpului magnetic. În jurul unei suprafețe de discontinuitate forma (3.17) devine:

$$\operatorname{div}_S \overline{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \overline{n}_{12} \cdot (\overline{B}_2 - \overline{B}_1) = 0 \quad \rightarrow \quad B_{n_1} = B_{n_2} \tag{3.21}$$

respectiv la trecerea printr-o discontinuitate liniile câmpului $\overline{B}$ astfel se refractă încât se conservă componenta normală a inducției magnetice.

Dimensional $[\Phi] = \text{Wb}$ (Weber) iar din expresia (3.16) rezultă:

$$[B] = \frac{\Phi}{S} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \text{T} \quad \text{(tesla)} \tag{3.22}$$

Totodată, din

$$\overline{B} = \text{rot}\overline{A} \xrightarrow[B=\frac{\partial A}{\partial r}]{} [A] = [B]\cdot[r] = \frac{N}{A\cdot m}\cdot m = \frac{N}{A} = T\cdot m \qquad (3.23)$$

Observaţii:

- Într-un câmp magnetic uniform fluxul magnetic prin suprafaţa S_Γ este: $\Phi_{S_\Gamma} = \overline{B}\cdot\overline{S}_\Gamma$ iar într-un câmp neuniform el este $\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{B}\,\overline{ds}$.
- Legea legăturii în câmp magnetic (2.53) precizează legătura dintre inducţia magnetică $\overline{B}$, intensitatea câmpului magnetic $\overline{H}$ şi magnetizaţia $\overline{M}$: $\overline{B} = \mu_o(\overline{H} + \overline{M})$, unde $\mu_o = 4\pi\cdot 10^{-7}\,H/m$ este *permeabilitatea vidului*, iar $\nu_o = \frac{1}{\mu_o} = \frac{10^7}{4\pi}$ şi este *reluctivitatea vidului*. Legea legăturii se poate scrie sub forma:

$$\overline{H} = \nu_o\,\overline{B} - \overline{M} \qquad (3.25)$$

Legea legăturii în câmp electric (2.19) este de forma:

$$\overline{D} = \varepsilon_o\,\overline{E} + \overline{P} \qquad (3.26)$$

Comparând cele două expresii (3.25) şi (3.26) se poate stabili o *analogie între câmpul electric şi câmpul magnetic:*

câmp electric câmp magnetic

$\overline{E} \longleftrightarrow \overline{B}$ → $\overline{E}$ şi $\overline{B}$ sunt *vectorii de bază* în cele două câmpuri; în funcţie de ei se exprimă efectele motoare, forţe, energii, etc.

$\overline{D} \longleftrightarrow \overline{H}$ → $\overline{D}$ şi $\overline{H}$ sunt *vectorii auxiliari* ai celor două câmpuri

$\varepsilon_o \longleftrightarrow \nu_o = \frac{1}{\mu_o}$ → corespondenţa *factorilor de mediu*

$(\varepsilon) \longleftrightarrow (\frac{1}{\mu})$

$\overline{P} \longleftrightarrow -\overline{M}$ → mărimea $\overline{P}_m = -\overline{M}$ este *polarizaţia magnetică*

3.3 Legea circuitului magnetic(legea curentului total)

3.3.1 Formele integrale ale legii

„Tensiunea magnetomotoare (t.m.m) u_{mm_Γ} de-a lungul oricărei curbe închise Γ este egală cu suma dintre solenația θ_{S_Γ} corespunzătoare unei suprafețe S_Γ ce se sprijină pe curba închisă Γ şi curentul hertzian i_{H_Γ} prin suprafața S_Γ ”. Matematic aceasta se scrie sub forma:

$$u_{mm_\Gamma} = \theta_{S_\Gamma} + \underbrace{\frac{d\,\psi_{S_\Gamma}}{dt}}_{i_{H_\Gamma}} \tag{3.27}$$

Expresia (3.27) este *forma integrală* a legii, unde:

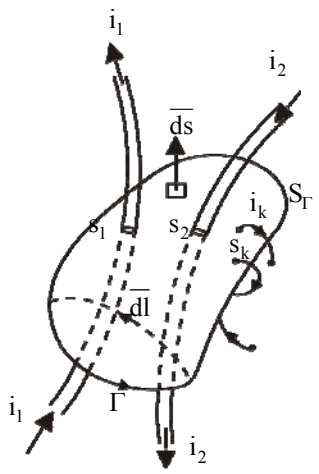


Fig 3.12

- $u_{mm_\Gamma} = \oint_\Gamma \overline{H}\,\overline{d\ell}$ – este *t.m.m.* de-a lungul curbei Γ iar $u_{m_{12}} = \int_1^2 \overline{H}\,\overline{d\ell}$ este *tensiunea magnetică* între punctele 1 şi 2 din câmpul $\overline{H}$
- θ_{S_Γ} – este *solenația* (*curentul de conducție total*) care străbate suprafața S_Γ. Aşa cum intensitatea curentului caracterizează curentul printr-un conductor, solenația generalizează „curentul printr-un conductor” la „curentul printr-o suprafață oarecare S_Γ”, care poate fi străbătută de mai multe conductoare sau de acelaşi conductor care trece de mai multe ori prin S_Γ (figura 3.12). Admitem o densitate de curent $\overline{J}$ prin suprafața S_Γ definită astfel încât să fie nulă în toate punctele suprafeței S_Γ cu excepția suprafețelor $S_1, S_2, ..., S_k$ efectiv parcurse de curent.

$$J = \begin{cases} \neq 0 \quad \text{pentru} \quad \bigcup_{k=1}^{n} S_k \\ = 0 \quad \text{pentru} \quad S_\Gamma - \bigcup_{k=1}^{n} S_k \end{cases} \tag{3.28}$$

În funcție de această densitate de curent (3.28), solenația se scrie sub forma:

$$\theta_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{J}\,\overline{ds} \tag{3.29}$$

- *curentul hertzian* prin suprafața S_Γ este : $\quad i_{H_\Gamma} = \dfrac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}$ (3.30)

unde: $\psi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{D}\,\overline{ds}$ este fluxul electric prin suprafața S_Γ. Fluxul electric din (3.8) are dimensiune: $[\psi] = [q] = C$ iar i_{H_Γ} va avea dimensiunea:

$$i_{H_\Gamma} = \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt} \quad \rightarrow \quad [i_{H_\Gamma}] = \frac{[d\psi_{S_\Gamma}]}{[dt]} = \frac{C}{s} = A \tag{3.31}$$

În expresia (3.30) avem o *derivată substanțială de flux*: un flux printr-o suprafață S_Γ poate fi variabil fie din cauza variației câmpului $\overline{D}$, respectiv $\overline{D}(t)$ şi suprafața este fixă în spațiu, fie câmpul nu este variabil în timp $\overline{D} \neq \overline{D}(t)$ dar suprafața S_Γ se mişcă în spațiu cu viteza $\overline{v}$ dinspre un câmp slab spre unul intens (derivata este (+)) sau invers (derivata este (–)). Matematic aceasta înseamnă:

$$i_{H_\Gamma} = \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \overline{D}\,\overline{ds} = \left[\int_{S_\Gamma = \text{fixă}} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\,\overline{ds}\right]_{\overline{D}=\overline{D}(t)} + \left[\int_{\substack{S_\Gamma = \text{mobilă} \\ \text{cu viteza } \overline{v}}} \left(\overline{v}\,\text{div}\,\overline{D} + \text{rot}\left(\overline{D}\times\overline{v}\right)\right)\overline{ds}\right]_{\overline{D}\neq\overline{D}(t)} \tag{3.32}$$

Ținând seama de (3.4) expresia (3.32) se scrie sub forma:

$$i_{H_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\,\overline{ds} + \int_{S_\Gamma} \rho_v\,\overline{v}\,\overline{ds} + \int_{S_\Gamma} \text{rot}(\overline{D}\times\overline{v})\,\overline{ds} \tag{3.33}$$

Înlocuind în (3.27) expresiile lui u_{mm_Γ}, θ_{S_Γ} şi i_{H_Γ} se obține:

$$\oint_\Gamma \overline{H}\,\overline{d\ell} = \underbrace{\int_{S_\Gamma} \overline{J}\,\overline{ds}}_{i_c} + \underbrace{\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\,\overline{ds}}_{i_d} + \underbrace{\int_{S_\Gamma} \rho_v\,\overline{v}\,\overline{ds}}_{i_T} + \underbrace{\int_{S_\Gamma} \text{rot}\left(\overline{D}\times\overline{v}\right)\overline{ds}}_{i_R} \tag{3.34}$$

Expresia (3.34) este *forma integrală dezvoltată* a legii iar integralele din membrul drept reprezintă:

i_c – intensitatea curentului de conducție prin S_Γ ($\bar{J}$ este densitatea sa)

i_d – intensitatea curentului de deplasare prin S_Γ ($\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ este densitatea sa)

i_T – intensitatea curentului de convecție (transport) prin S_Γ ($\rho_v \bar{v}$ este densitatea sa)

i_R – intensitatea curentului Röentgen prin S_Γ ($\text{rot}(\bar{D} \times \bar{v})$ este densitatea sa)

Observație:

$\bar{J}_R = \text{rot}(\bar{D} \times \bar{v})$ este densitatea curentului Röentgen teoretic iar $\text{rot}(\bar{P} \times \bar{v})$ este densitatea curentului Röentgen practic, verificat experimental, diferență care în formulare macroscopică nu afectează calculele tehnice; deosebirea are o justificare doar în electrodinamica relativistă.

În membrul stâng al legii (3.34) sunt numai mărimi magnetice iar în membrul drept sunt numai mărimi electrice. Deci legea circuitului magnetic *face legătura dintre aspectul electric şi cel magnetic* al câmpului electromagnetic, respectiv legea spune că „un câmp magnetic este creat de către curenți electrici (indiferent de natura lor fizică: conducție, deplasare, convecție, Röentgen)".

Aceasta este singura proprietate comună a celor patru genuri de curenți electrici, de unde şi numele acestei legi de*,legea curentului total*. Afirmația că: „*orice curent electric produce un câmp magnetic în jurul său"* admite şi reciproca: „*nu pot exista linii de câmp magnetic fără ca ele să înconjoare linii de curent".*

În *medii fixe* (fără corpuri în mişcare $\bar{v} = 0$) expresia (3.34) se reduce la forma:

$$\oint_\Gamma \bar{H}\, d\bar{\ell} = \theta_{S_\Gamma} + \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\, \bar{ds} \qquad (3.35)$$

respectiv câmpul magnetic $\bar{H}$ este creat doar de curenți de conducție (solenație) şi de curenți de deplasare (câmpuri electrice variabile $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \neq 0$).

Regimul cvasistaţionar este un regim variabil de frecvenţă mică (medie) în care $\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} << $, deci se poate neglija curentul de deplasare, respectiv câmpul magnetic creat de el, peste tot, cu excepţia dielectricului dintre armăturile unui condensator (altfel nu se asigură continuitatea liniilor de curent prin condensator), vezi figura 3.13 .

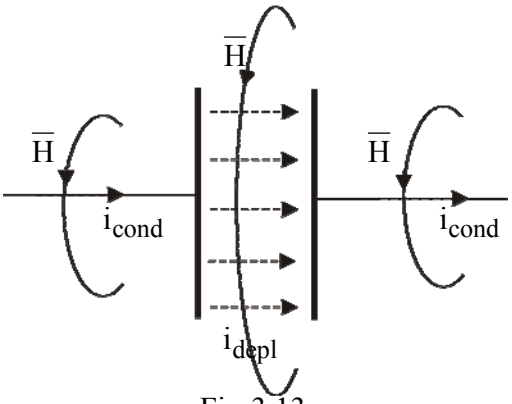


Fig 3.13

Deci în regim cvasistaţionar un câmp magnetic este produs numai de către curenţi de conducţie (solenaţie) la fel ca şi în regim staţionar (curent continuu):

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}\, d\overline{\ell} = \theta_{S_\Gamma} \qquad (3.36)$$

Această formă particulară a legii (3.36) valabilă în regim staţionar şi cvasistaţionar este cunoscută şi sub numele de *teorema lui Ampère.*

În *vid* unde nu există corpuri conductoare (deci $\overline{J} = 0,\ \theta_{S_\Gamma} = 0$) dar nici corpuri în mişcare $(\overline{v} = 0)$, din expresia (3.34) mai rămâne:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}\, d\overline{\ell} = \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\, \overline{ds} \qquad (3.37)$$

care pune în evidenţă faptul că în lipsa corpurilor (în particular în vid), un câmp magnetic $\overline{H}$ este produs doar de către curenţii de deplasare, respectiv este produs de către câmpuri electrice variabile $\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \neq 0$.

3.3.2 Formele locale ale legii

În domenii de continuitate a proprietăţilor fizice, respectiv de continuitate a câmpului magnetic, aplicând teorema lui Stokes în membrul stâng din (3.34) se obţine:

$$\int_{S_\Gamma} \text{rot}\, \overline{H}\, \overline{ds} = \int_{S_\Gamma} \left[\overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \rho_v\, \overline{v} + \text{rot}\left(\overline{D} \times \overline{v} \right) \right] \overline{ds} \qquad (3.38)$$

Cum suprafața S_Γ are o formă arbitrar aleasă, rezultă că:

$$\text{rot}\,\overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \rho_v\,\overline{v} + \text{rot}(\overline{D}\times\overline{v}) \qquad (3.39)$$

Expresia (3.39) reprezintă *forma locală* (valabilă în orice punct din domeniu) a legii circuitului magnetic, respectiv „liniile câmpului $\overline{H}$ fac rotoare drepte în jurul tuturor liniilor de curent care l-au creat; liniile lui $\overline{H}$ sunt conținute în plane $\perp$ pe liniile de curent".

- În *medii fixe*, fără corpuri în mișcare $(\overline{v} = 0)$ forma locală este:

$$\text{rot}\,\overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \qquad (3.40)$$

Această formă locală a legii este cunoscută şi sub denumirea de *prima ecuație a lui Maxwell* şi ea face parte dintr-un sistem de ecuații cu derivate parțiale.

- În *regim cvasistaționar* $(\frac{\partial}{\partial t} << \ ;\ \overline{v} = 0)$ forma locală a legii este:

$$\text{rot}\,\overline{H} = \overline{J} \qquad (3.41)$$

liniile lui $\overline{H}$ fac *rotoare drepte* (regula burghiului drept) în jurul curentului $\overline{J}$ din fire conductoare. Cum $\text{rot}\,\overline{H} = \nabla\times\overline{H} = \overline{J}$ rezultă că liniile lui $\overline{H}$ şi cele ale lui $\overline{J}$ sunt conținute în plane ortogonale; aceasta ne ajută să intuim geometria liniilor lui $\overline{H}$ atunci când cunoaştem geometria liniilor lui $\overline{J}$ ca în figura 3.14.

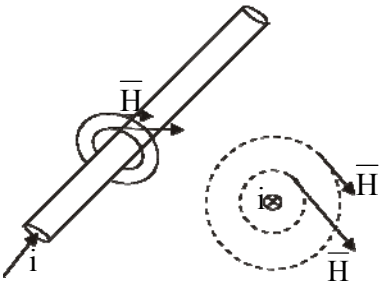


Fig 3.14

- În *vid* forma locală a legii este:

$$\text{rot}\,\overline{H} = \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \qquad (3.42)$$

respectiv liniile unui câmp magnetic produs de un câmp electric variabil (figura 3.15) sunt conținute în plane perpendiculare pe liniile câmpului electric iar ca sens fac rotoare drepte, dacă $\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} > 0$ sau rotoare stângi, dacă $\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} < 0$.

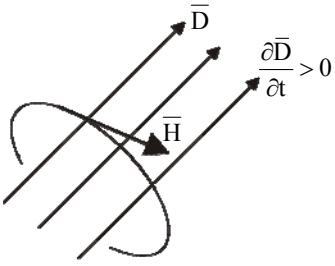


Fig 3.15

Expresiile (3.39), (3.40), (3.41), (3.42) deduse prin aplicarea teoremei lui Stokes sunt valabile doar în domeniile de continuitate.

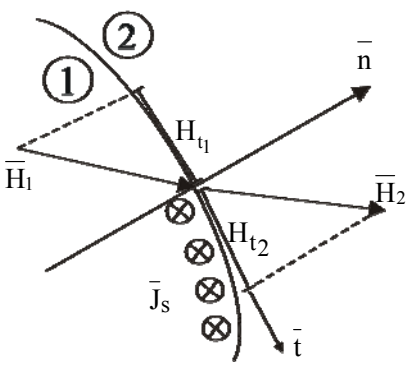


Fig 3.16

Dacă S_{12} este o *suprafață de discontinuitate* care separă domeniile ① și ② și presupunem că este o *discontinuitate activă* (conține o *pânză de curent* $\bar{J}_S$), atunci forma (3.41) aplicată în vecinătatea lui S_{12} devine:

$$\text{rot}_S\,\bar{H} = \bar{J}_S \quad \leftrightarrow \quad \bar{n}\times\left(\bar{H}_2 - \bar{H}_1\right) = \bar{J}_S \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \bar{H}_{t_2} - \bar{H}_{t_1} = \bar{J}_S \qquad (3.43)$$

unde $\bar{n}$ și $\bar{t}$ sunt versorii normal și tangent în orice punct al discontinuității S_{12} (vezi figura 3.16).

Dacă discontinuitatea S_{12} este o *discontinuitate pasivă*, o îmbinare între două medii cu μ_1 și μ_2 fără a conține o pânză de curent ($\bar{J}_S = 0$) atunci:

$$\text{rot}_S\,\bar{H} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \bar{H}_{t_2} = \bar{H}_{t_1} \quad \leftrightarrow \quad H_{t_2} = H_{t_1} \qquad (3.44)$$

La trecerea printr-o discontinuitate pasivă liniile lui $\bar{H}$ astfel se refractă încât se conservă componenta tangențială a lui $\bar{H}$.

Observație:

Forma integrală (3.36) a legii poate constitui suport pentru a crea un algoritm de calcul a unui câmp magnetic creat de curenți de conducție:

$$\oint_\Gamma \bar{H}\,\bar{d\ell} = \theta_{S_\Gamma} \qquad (3.36)$$

Expresia (3.36) este adevărată pentru orice curbă închisă Γ, respectiv orice suprafață care se sprijină pe curba Γ. Calculul circulației din membrul stâng se simplifică dacă aleg curba Γ în concordanță cu geometria liniilor câmpului $\bar{H}$:

a–) dacă intuim apriori forma liniilor lui $\bar{H}$, alegem drept curbă Γ o linie de câmp, atunci $\bar{H}$ și $\bar{d\ell}$ vor fi tangente la curba Γ, respectiv:

$$\bar{H}\cdot\bar{d\ell} = H\cdot d\ell \qquad (3.37)$$

b–) dacă geometria liniilor de câmp este astfel ca în lungul liniei de câmp modulul câmpului să rămână constant, atunci:

$$\oint_\Gamma H d\ell = H\oint_\Gamma d\ell = H\cdot\ell_\Gamma \qquad (3.38)$$

această ipoteză este valabilă doar dacă liniile lui $\overline{H}$ sunt echidistante (sau în particular paralele) ca în figura 3.17 şi evaluăm lungimea liniei de câmp ℓ_Γ şi solenaţia $\theta_{S\Gamma}$ prin suprafaţa curbei Γ.

Deci dacă sunt îndeplinite ipotezele (3.37) şi (3.38) atunci:

$$\oint_\Gamma \overline{H}\,\overline{d\ell} = \theta_{S_\Gamma} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \oint_\Gamma \overline{H}\,\overline{d\ell} \underset{(a)}{=} \oint_\Gamma H d\ell \underset{(b)}{=} H\ell_\Gamma \\ \theta_{S_\Gamma} = \text{suma algebrică a curenţilor prin suprafaţa } S_\Gamma \end{cases}$$

$$H_\Gamma \cdot \ell_\Gamma = \theta_{S_\Gamma} \quad \rightarrow \quad H_\Gamma = \frac{\theta_{S_\Gamma}}{\ell_\Gamma} \qquad (3.39)$$

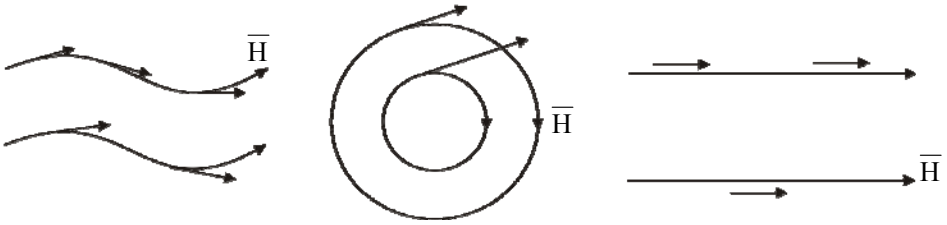


Fig 3.17

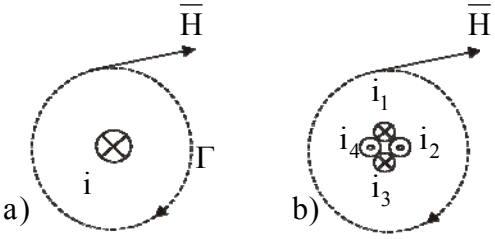


Fig 3.18

Aplicaţii

1. Un fir rectiliniu parcurs de curentul i sau un mănunchi de fire parcurse de curenţii i_1, i_2, i_3 şi i_4 este situat într-un mediu omogen (figura3.18). Să se determine expresia câmpului magnetic creat.

În ambele situaţii liniile lui $\overline{H}$ sunt cercuri de rază r situate în plane $\perp$ pe firele parcurse de curenţi. Cercurile fac parte din categoria liniilor echidistante, deci putem aplica (3.39):

a) $$\oint_\Gamma \overline{H}\,\overline{d\ell} = i \quad \leftrightarrow \quad H \cdot 2\pi r = i \quad \rightarrow \quad H = \frac{i}{2\pi r} \qquad (3.40)$$

Ca vector liniile lui $\overline{H}$ sunt tangente la cerc, deci sunt dirijate după coordonata φ a sistemului cilindric: $\overline{H} = H\,\overline{u}_\varphi = \frac{i}{2\pi r}\,\overline{u}_\varphi$; $\overline{u}_\varphi$-versorul axei φ.

b) $$\oint_{\Gamma} \overline{H}\,\overline{d\ell} = \theta_{S_\Gamma} \quad \leftrightarrow \quad H \cdot 2\pi r = i_1 - i_2 + i_3 - i_4 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad H = \frac{i_1 - i_2 + i_3 - i_4}{2\pi r} \quad \rightarrow \quad \overline{H} = H \cdot \overline{u}_\varphi \qquad (3.41)$$

2. O bobină cilindrică lungă (lungimea ℓ a bobinei este mult mai mare decât diametrul spirelor) numită şi *solenoid* are N spire parcurse de curentul i ca în figura 3.19 . Se cere expresia câmpului $\overline{H}$ creat.

Liniile lui $\overline{H}$ sunt fascicul paralel şi $H \neq 0$ doar în interiorul solenoidului, deci putem aplica (3.39):

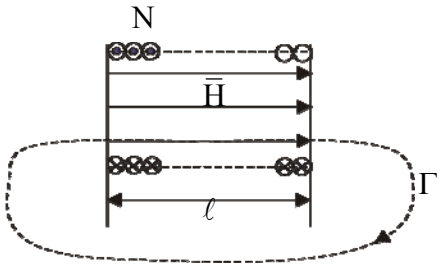


Fig 3.19

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}\,\overline{d\ell} = \theta_{S_\Gamma} \quad \leftrightarrow \quad H \cdot \ell = N \cdot i \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad H = \frac{N \cdot i}{\ell} \qquad (3.42)$$

Care este un câmp magnetic uniform(valoare constantă în interiorul bobinei).

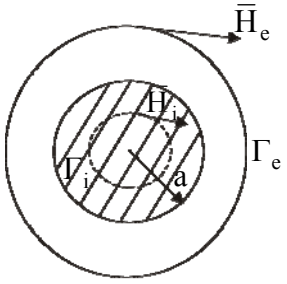


Fig 3.20

3. Un fir rectiliniu de rază a (figura 3.20) este parcurs de curentul conducție i, repartizat uniform pe secțiunea firului cu densitatea: $J = \frac{i}{\pi a^2}$. Se cere $\overline{H}_i$ şi $\overline{H}_e$ şi să se arate că $\overline{B}_e = \mu \overline{H}_e$ satis face legea fluxului magnetic.

Liniile lui $\overline{H}$ sunt cercuri atât în interiorul conductorului cât şi în exteriorul său.

a) pentru interior $(r < a)$ alegem o linie de câmp Γ_i – cerc de rază r şi aplicăm (3.39):

$$\oint_{\Gamma_i} \overline{H}_i\,\overline{d\ell} = \theta_{S_{\Gamma_i}} \quad \leftrightarrow \quad H_i\, 2\pi r = J\, \pi r^2 \quad \rightarrow \quad H_i = \frac{1}{2} J\, r = \frac{i}{2\pi a^2} r$$

Ca vector $\overline{H}_i$ este tangent la curba Γ_i, deci are versorul $\overline{u}_\varphi$:

$$\overline{H}_i = H_i \cdot \overline{u}_\varphi \quad \text{sau} \quad \overline{H}_i = \frac{1}{2} J\, r\, \overline{u}_\varphi = \frac{1}{2}(\overline{J} \times \overline{r}) \qquad (3.43)$$

b)pentru exteriorul conductorului $(r \geq a)$ alegem o linie de câmp Γ_e:

$$\oint_{\Gamma_e} \overline{H}_e \, \overline{d\ell} = \theta_{S_{\Gamma_e}} \leftrightarrow H_e \cdot 2\pi r = i \rightarrow H_e = \frac{i}{2\pi r}; \overline{H}_e = \frac{i}{2\pi r}\overline{u}_\varphi \qquad (3.44)$$

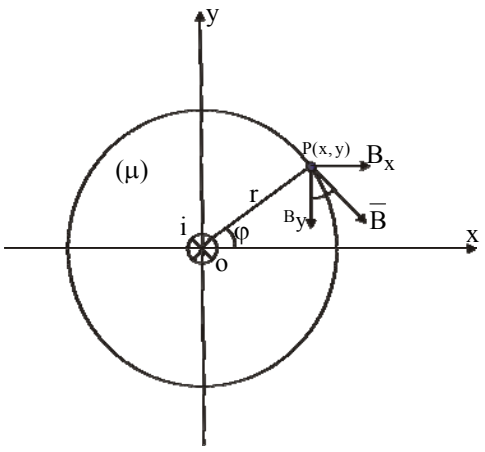


Fig 3.20'

Inducția magnetică în exteriorul firului este: $B = B_e = \frac{\mu i}{2\pi r}$. Componentele acestui câmp se scriu sub forma:

$$\begin{cases} B_x = B\sin\varphi = B\frac{y}{r} = \frac{\mu i}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \\ B_y = -B\cos\varphi = -B\frac{x}{r} = \frac{\mu i}{2\pi}\frac{-x}{x^2+y^2} \end{cases} \qquad (3.44')$$

Înlocuite în forma locală (3.17) a legii fluxului magnetic ele o verifică sub forma:

$$\operatorname{div}\overline{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\mu i}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)\right] = 0$$

3.4 Legea inducției electromagnetice

3.4.1 Fenomenul de inducție electromagnetică

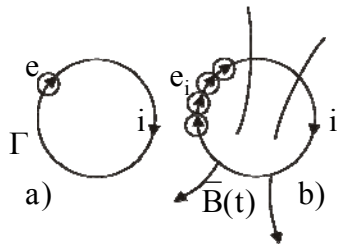


Fig 3.21

Experimental se constată că într-o spiră conductoare Γ există curent i dacă spira conține o sursă cu t.e.m e (figura 3.21–a) care produce curentul i sau dacă prin suprafața spirei trece un câmp magnetic variabil în timp $\overline{B}(t)$ ca în figura 3.21–b care induce în spiră t.e.m indusă e_i și care la rândul său va produce un curent indus i. Deosebirea este că sursa „e" este concentrată local pe spira Γ iar t.e.m indusă e_i apare ca o sursă uniform

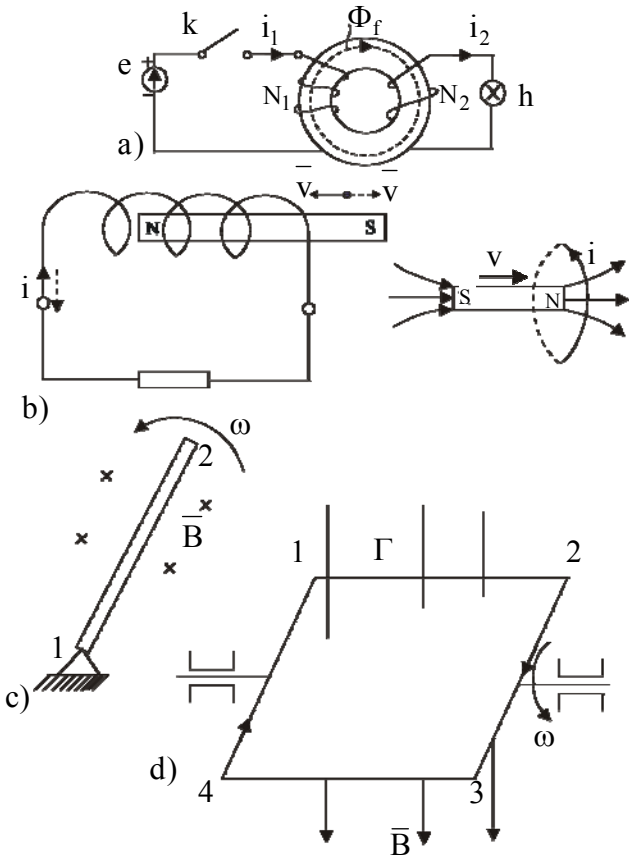


Fig 3.22

distribuită de-a lungul spirei Γ, efectul însă, curentul i, este acelaşi. Situaţiile ilustrate în figura 3.22 pun în evidenţă că:

a) Există curent în secundar ($i_2 \neq 0$) şi lampa h arde numai dacă fluxul magnetic din miez Φ_f este variabil în timp (la închiderea şi deschiderea contactului k). În secundar se induce o *t.e.m statică (t.e.m de transformare)*.

b) la apropierea magnetului de spiră (sau de bobină) fluxul magnetic prin aceasta creşte, se induce curent i într-un anumit sens iar la îndepărtare se schimbă sensul curentului indus. Totul este invers când magnetul se apropie (sau îndepărtează) cu polul sud. Deci sensul curentului indus depinde şi de sensul de variaţie a fluxului inductor.

c) dacă o bară se mişcă (taie linii de câmp) într-un câmp $\overline{B}$, între capetele ei (1,2) se va induce o t.e.m e_{21} chiar dacă circuitul este deschis (bara nu închide o suprafaţă, deci nu avem flux magnetic inductor), dar va apare o *t.e.m de mişcare* în bara mobilă.

d) o spiră Γ dreptunghiulară se poate roti cu viteza unghiulară ω într-un câmp magnetic exterior $\overline{B}$.

– dacă $\omega = 0$ şi $\overline{B}(t)$ în spiră se va induce o *t.e.m statică* „e_t”

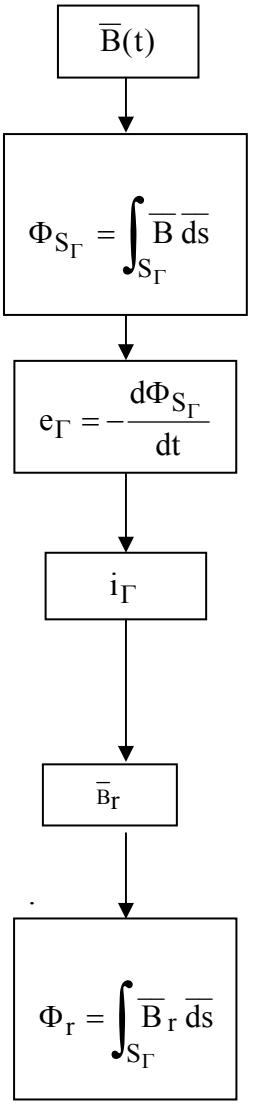
–dacă $\omega \neq 0$ şi $\overline{B} \neq \overline{B}(t)$ în spiră se induce o *t.e.m de mişcare* „e_m” care de fapt se induce doar pe laturile 1-2 şi 3-4 care în mişcare lor taie liniile câmpului $\overline{B}$.

– dacă $\omega \neq 0$ şi $\overline{B} = \overline{B}(t)$ în spira Γ se induce atât t.e.m de mişcare cât şi de transformare: $e_\Gamma = e_t + e_m$.

Inducţia electromagnetică este fenomenul prin care se induce o t.e.m într-un circuit (o spiră Γ, în general) datorită variaţiei în timp a fluxului magnetic Φ_{S_Γ} care străbate suprafaţa curbei Γ. Sensul t.e.m induse este astfel încât prin toate efectele sale să se opună cauzei inductoare (regula lui Lenz).

3.4.2 Formele integrale ale legii

Sub formă integrală legea spune că „t.e.m e_Γ indusă prin inducţie electromagnetică în lungul curbei Γ este egală numeric cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin suprafaţa S_Γ a curbei Γ”.



→ câmpul magnetic exterior (*câmpul magnetic inductor*)[T]

→ *fluxul magnetic inductor* [Wb], cel care prin variaţia sa în timp induce o t.e.m;

→ *t.e.m indusă* în curba închisă Γ [V]; $1V = \frac{1Wb}{1sec}$

→ dacă curba Γ este din material izolant (sau este o curbă virtuală) t.e.m indusă nu are nici un efect;

→ dacă spira Γ este din material conductor, atunci t.e.m indusă e_Γ se converteşte într-un *curent electric indus* în curba Γ:

$$(i_\Gamma = \frac{e_\Gamma}{R_{sp}}; i_\Gamma = C_{sp}\frac{de_\Gamma}{dt}; i_\Gamma = \frac{1}{L_{sp}}\int e_\Gamma dt...)$$

→ curentul indus în spiră (i_Γ) creează în jurul acesteia un câmp magnetic (câmpul magnetic creat de curenţii induşi se numeşte *câmp magnetic de reacţie* $\overline{B}_r$)

→*Fluxul magnetic de reacţie* este fluxul câmpului $\overline{B}_r$.

$$e_\Gamma = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \tag{3.45}$$

Relația (3.45) este *forma integrală compactă* a legii.

În general $\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}$ este viteza de creştere a fluxului Φ_{S_Γ} iar $-\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}$ este viteza de scădere în timp.

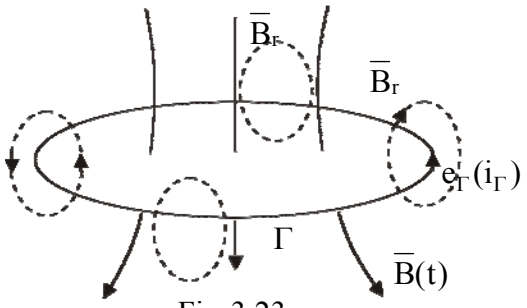
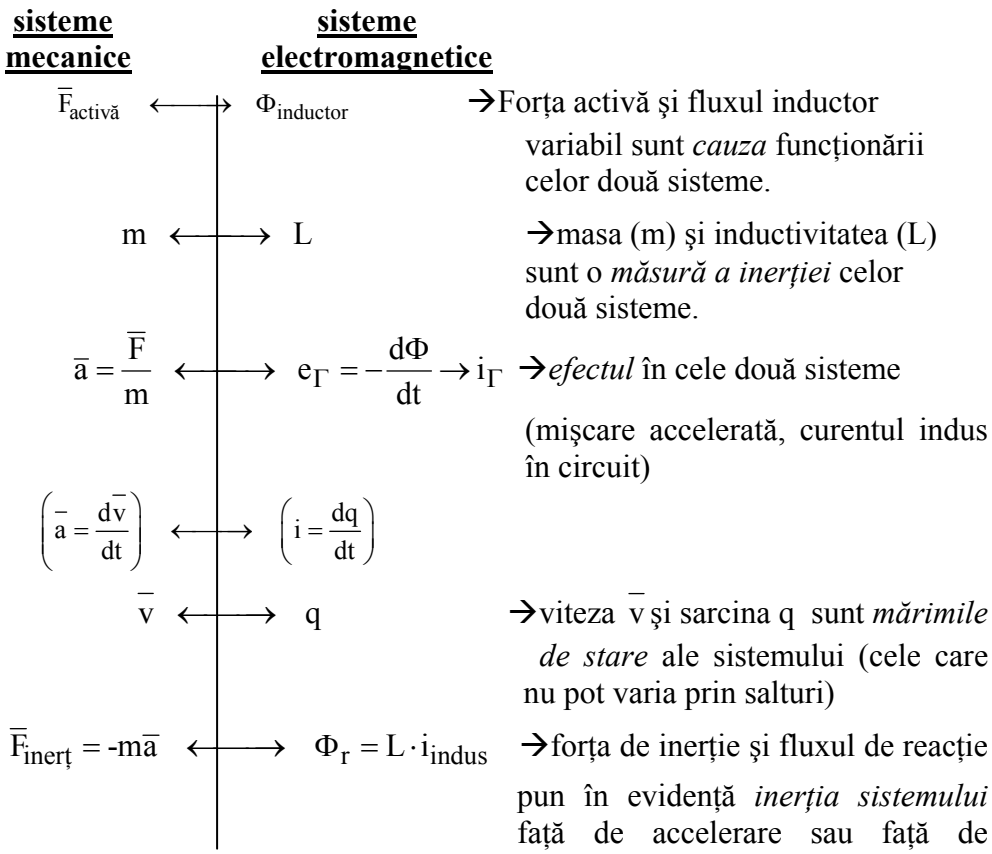


Fig 3.23

Prin toate efectele sale, fluxul magnetic de reacție se opune efectelor fluxului magnetic inductor Φ_{S_Γ}. În particular, Φ_r se opune variației în timp a fluxului inductor Φ_{S_Γ}: la creşterea lui Φ_{S_Γ} $(\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} > 0)$, Φ_r are sens contrar cu Φ_{S_Γ} ca în figura 3.23 şi se opune creşterii, iar la scăderea lui Φ_{S_Γ} $(\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} < 0)$, fluxul de reacție îşi schimbă sensul şi are acelaşi sens cu Φ_{S_Γ} opunându-se astfel scăderii lui. Datorită existenței fluxului magnetic de reacție Φ_r, se spune că *circuitele prezintă inerție față de variația fluxului magnetic inductor* prin suprafața lor.

Din acest punct de vedere fluxul magnetic de reacție Φ_r are în sistemele electrice acelaşi rol pe care îl are forța de inerție $\bar{F}_i$ în sistemele mecanice. De altfel, între cele două clase de probleme se poate stabili o analogie:



T.e.m indusă e_Γ se poate exprima în funcție de *câmpul electric indus* $\bar{E}$ sub forma:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \bar{E}\, d\bar{\ell} \qquad (3.46)$$

Deci mai general, un câmp magnetic variabil $\bar{B}(t)$ induce în jurul său un *câmp electric indus* $\bar{E}$ care există în orice condiții. Dacă în câmpul indus $\bar{E}$ considerăm curba Γ, vom evalua *t.e.m indusă* e_Γ cu (3.46) iar dacă Γ este o spiră conductoare atunci va apare *curentul indus* i_Γ.

Derivata fluxului magnetic inductor $\left(-\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}\right)$ o exprimăm cu (3.32) astfel: $-\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\,\overline{ds} - \int_{S_\Gamma}\left[\overline{v}\,\underbrace{\operatorname{div}\overline{B}}_{=0} + \operatorname{rot}\left(\overline{B}\times\overline{v}\right)\right]\overline{ds}$ (3.47)

deoarece curba Γ poate, în principiu, să treacă prin conductori, izolanți, vid şi ea este ataşată corpurilor mobile în mişcarea lor cu viteza $\overline{v}$. Înlocuind în expresia (3.45) se obține:

$$\oint_\Gamma \overline{E}\,\overline{d\ell} = \int_{S_\Gamma} -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\overline{ds} - \int_{S_\Gamma} \operatorname{rot}\left(\overline{B}\times\overline{v}\right)\overline{ds} \qquad (3.48)$$

care reprezintă *forma integrală dezvoltată* a legii inducției electromagnetice.

În membrul stâng sunt mărimi electrice $(\overline{E})$ iar în membrul drept sunt numai mărimi magnetice, deci şi legea inducției electromagnetice este o lege generală care face legătura dintre aspectul electric şi aspectul magnetic al câmpului electromagnetic.

Aplicând teorema lui Stokes în ultimul termen din (3.48) se obține:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \overline{E}\,\overline{d\ell} = -\underbrace{\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\,\overline{ds}}_{e_t} + \underbrace{\oint_\Gamma (\overline{v}\times\overline{B})\overline{d\ell}}_{e_m} \qquad (3.49)$$

- $e_t = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\overline{ds}$ – este *t.e.m de transformare* (statică) care se induce în circuite fixe prin suprafața cărora trece un câmp magnetic variabil $\left(\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \neq 0\right)$
- $e_m = \oint_\Gamma \left(\overline{v}\times\overline{B}\right)\overline{d\ell}$ – este *t.e.m de mişcare* (dinamică) care se induce într-o curbă Γ care se mişcă în câmpul $\overline{B}$ cu viteza $\overline{v}$.

Mărimea $(\overline{v}\times\overline{B})\overline{d\ell}$ fiind un produs mixt, va fi nul când două dintre cele trei mărimi sunt paralele(şi în acest caz $e_m = 0$):

$\overline{v} \parallel \overline{d\ell}$ – conductorul se mişcă în lungul său

$\overline{v} \parallel \overline{B}$ – mişcarea conductorului are loc în lungul liniilor de câmp $\overline{B}$

$\overline{B} \parallel \overline{d\ell}$ – conductorul rămâne pe timpul mişcării paralel cu liniile lui $\overline{B}$

Se induce t.e.m de mişcare e_m numai dacă în mişcarea sa, conductorul *taie linii de câmp* $\overline{B}$ (constant sau variabil în timp). Dacă $\overline{v}$, $\overline{B}$ şi $\overline{\ell}$ formează un triedru drept, t.e.m de mişcare este $e_m = \pm B\ell v$; semnul $(\pm)$ după cum vectorul $(\overline{v} \times \overline{B})$ se asociază $(\pm)$ cu sensul lui $\overline{d\ell}$ de pe curba Γ.

T.e.m se calculează ca o circulaţie: $e_\Gamma = \oint_\Gamma \overline{E}\,\overline{d\ell}$ iar fluxul magnetic ca o integrală de flux: $\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{B}\,\overline{ds}$.

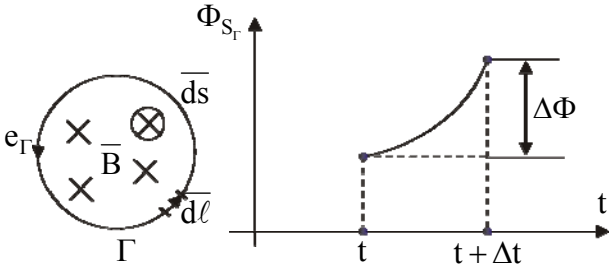


Fig 3.24

Dacă sensul de integrare pe curba Γ $(\overline{d\ell})$ se asociază corect cu orientarea lui S_Γ $(\overline{ds})$, în acest caz t.e.m e_Γ are expresia (3.45). Când nu se asociază corect $\overline{d\ell}$ cu $\overline{ds}$, atunci: $e_\Gamma = \dfrac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}$. Să ilustrăm acest lucru:

→ $\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{B}\,\overline{ds} > 0$ cu sensul ales incorect pentru $\overline{ds}$ la S_Γ (figura 3.24)

→presupunând $\Delta\Phi > 0$, fluxul în creştere prin valori pozitive $\left(\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right) > 0$. În acest caz: $e_\Gamma = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0$; o t.e.m $e_\Gamma > 0$ înseamnă că se induce în sensul în care am orientat curba Γ (figura 3.24).

Pentru orientarea lui $\overline{ds}$ din figura 3.25 rezultă:

→ $\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{B}\,\overline{ds} < 0$; $\qquad \overline{ds} \uparrow\downarrow \overline{B}$

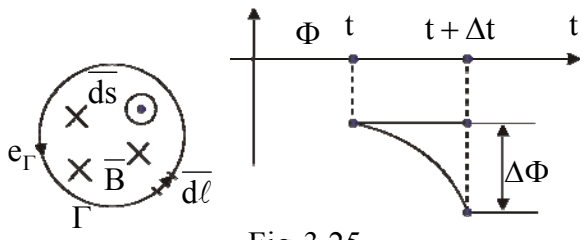


Fig 3.25

→fluxul negativ îl presupunem în scădere $\Delta\Phi < 0$, deci $\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right) < 0$.

Cum $\overline{d\ell}$ şi $\overline{ds}$ se asociază corect, t.e.m indusă va fi: $e_\Gamma = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0$, deci e_Γ se induce în sensul lui $\overline{d\ell}$ (când $e_\Gamma < 0$, ea se induce invers cu orientarea curbei Γ).

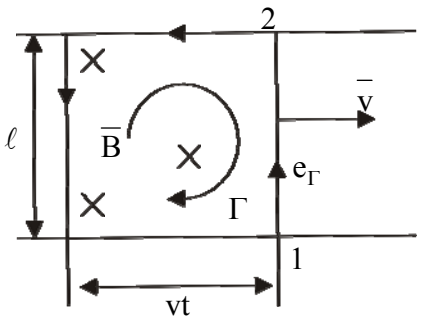
În ambele cazuri avem aceeaşi problemă fizică: prin S_Γ trece un flux magnetic în creştere doar cu valori (+) sau (–). Numai alegerea orientării prealabile a curbei Γ a diferit, rezultatul însă nu depinde de aceasta. A rezultat acelaşi sens pentru e_Γ.

Observaţie:

Calculul t.e.m induse e_Γ prin cele două modalităţi trebuie înţeleasă astfel: –) „$\frac{d\Phi}{dt}$” este operaţia de derivare a fluxului $\Phi(t)$, iar „$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$” este operaţia de împărţire dintre creşterea fluxului Φ (creşterea funcţiei) şi creşterea timpului (creşterea argumentului).

a) $$\overline{B}(t) \rightarrow \Phi^{\pm}_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \overline{B}\,\overline{ds} \rightarrow e_\Gamma = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \qquad (3.50)$$

b) $$\overline{B}(t) \xrightarrow[\text{uniform}]{\text{câmp}} \Phi^{\pm}_{S_\Gamma} = \overline{B}\cdot\overline{S_\Gamma} \rightarrow \Delta\Phi = \Phi_{t+\Delta t} - \Phi_t \rightarrow e_\Gamma = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$



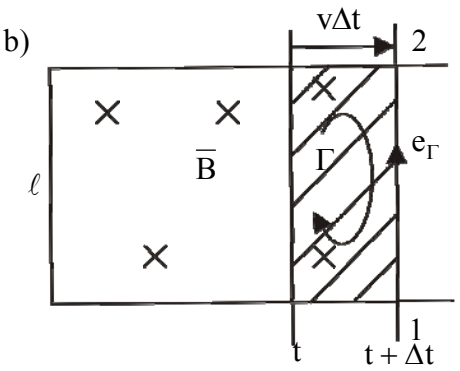
Exemplificăm cu o bară care lunecă, în contact cu un cadru, într-un câmp magnetic $\overline{B}$. Suprafaţa $S_\Gamma = \ell vt$ este variabilă în timp, deci şi fluxul magnetic va fi variabil.

$\Phi_{S_\Gamma} = \pm B\, S_\Gamma = B(\ell vt) \rightarrow$

$\rightarrow e_\Gamma = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} = -B\ell v = e_{12}$

Sau, în timpul Δt suprafaţa creşte cu ΔS_Γ: $\Delta S_\Gamma = \ell v\Delta t$ (figura b) iar fluxul are o variaţie: $\Delta\Phi_{S_\Gamma} = B\Delta S_\Gamma = B\ell v\Delta t$.

b)



T.e.m indusă are expresia:

$$e_\Gamma = -\frac{\Delta\Phi_{S_\Gamma}}{\Delta t} = -\frac{B\ell v\Delta t}{\Delta t} = -B\ell v = e_{12}$$

3.4.3 Formele locale ale legii

În domenii de continuitate a mediului (deci şi a câmpului $\overline{B}$) putem aplica teorema lui Stokes asupra membrului stâng din (3.48) şi se obține:

$$\int_{S_\Gamma} \text{rot}\,\overline{E}\,\overline{ds} = -\int_{S_\Gamma}\left[\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} + \text{rot}\left(\overline{B}\times\overline{v}\right)\right]\overline{ds} \qquad (3.51)$$

Suprafața S_Γ fiind aleasă în mod arbitrar, rezultă că:

$$\text{rot}\,\overline{E} = -\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} - \text{rot}\,(\overline{B}\times\overline{v}) \qquad (3.52)$$

Expresia (3.52) reprezintă *forma locală* a legii inducției electromagnetice . Pentru *medii fixe* (fără corpuri în mişcare, $\overline{v} = 0$) în forma integrală nu există decât e_t iar sub formă locală rămâne:

$$\text{rot}\,\overline{E} = -\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} \qquad (3.53)$$

care pune în evidență faptul că liniile de câmp electric indus $(\overline{E})$ fac rotoare stângi $(\text{rot}\,\overline{E} < 0)$ în jurul liniilor unui câmp magnetic inductor, fiind situate în plane $\perp$ pe liniile lui $\overline{B}$. Totodată forma locală (3.53) face parte din pachetul de ecuații ale câmpului electromagnetic, cunoscută sub numele de *ecuația a doua a lui Maxwell.*

În general câmpul electric indus: $\overline{E}_{indus} = \overline{E}$ are două componente: $\overline{E}_{transf} = \overline{E}_t$ şi $\overline{E}_{mişc} = \overline{E}_m$, care au semnificațiile:

$$\overline{E} = \overline{E}_t + \overline{E}_m \qquad (3.54)$$

$$\begin{cases} \text{rot}\ \bar{E} = \text{rot}\ \bar{E}_t + \text{rot}\ \bar{E}_m \\ \text{rot}\ \bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \text{rot}(\bar{v} \times \bar{B}) = -\text{rot}\left(\dfrac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) + \text{rot}(\bar{v} \times \bar{B}) \end{cases} \tag{3.55}$$

Prin identificare rezultă cele două componente ale câmpului electric indus:

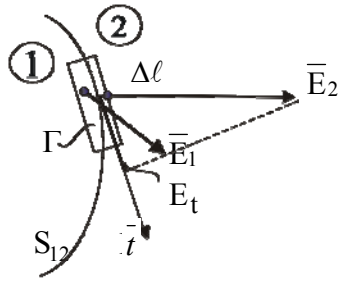
$$\begin{cases} \bar{E}_t = -\dfrac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \textit{câmp electric indus static} \text{ (câmp de tip Neumann)} \\ \bar{E}_m = \bar{v} \times \bar{B} - \textit{câmp electric indus prin mişcare} \end{cases} \tag{3.56}$$

Dimensional

$$\begin{cases} [A] = [E] \cdot [t] = \dfrac{V}{m} \cdot \sec = \dfrac{Wb}{m} = Tm \\ [E_m] = [v] \cdot [B] = \dfrac{m}{\sec} \cdot \dfrac{V \sec}{m^2} = \dfrac{V}{m} \end{cases} \tag{3.57}$$

Observaţii:

- Curba plată Γ având $S_\Gamma <<,$ deci $\Phi_{S_\Gamma} \approx 0,$ înconjoară o discontinuitate S_{12}:



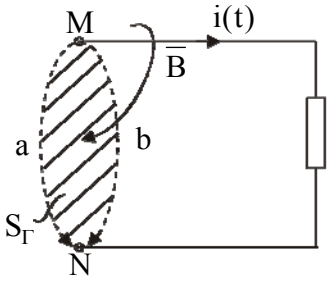
$$\oint_\Gamma \bar{E}\, d\bar{\ell} = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \quad \bar{E}_2\, \bar{t}\, \Delta\ell - \bar{E}_1\, \bar{t}\, \Delta\ell = 0 \quad \rightarrow \quad E_{t_2} = E_{t_1}$$

La trecerea printr-o discontinuitate liniile câmpului $\bar{E}$ astfel se refractă încât se conservă componenta sa tangenţială:

$$E_{t_1} = E_{t_2} \tag{3.58}$$

-) Tensiunea între punctele M şi N în regim variabil depinde de drumul de integrare:



$$\oint_\Gamma \bar{E}\, d\bar{\ell} = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \leftrightarrow \underbrace{\int_{MaN} \bar{E}\, d\bar{\ell}}_{u_{MaN}} + \underbrace{\int_{NbM} \bar{E}\, d\bar{\ell}}_{-u_{MbN}} = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \rightarrow u_{MaN} \neq u_{MbN}$$

Numai în regim staţionar există noţiunea de *potenţial electric* şi

atunci cele două tensiuni ar fi egale cu „diferența de potențial” dintre M şi N noțiune care în regim variabil nu există.

- Formele locale valabile în vid:

$$\text{rot}\,\bar{H}=\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}\quad;\quad \text{rot}\,\bar{E}=-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \tag{3.59}$$

arată că un câmp electric variabil $\left(\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}\right)$ *produce* în jurul său câmp magnetic iar un câmp magnetic variabil $\left(\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\right)$ *induce* în jurul său un câmp electric. Unda electrică este $\perp$ în spațiu pe cea magnetică, ele se autogenerează reciproc şi în vid (în lipsa altor sisteme) şi se propagă cu viteză finită.

- Prin cele N spire ale unei bobine trece *fluxul magnetic fascicular* Φ_f care va induce în fiecare spiră o t.e.m „e'” iar t.e.m indusă la bornele bobinei este:

$$e=Ne'=-N\frac{d\Phi_f}{dt}=-\frac{d\Phi_t}{dt} \tag{3.60}$$

Φ_f – este *fluxul fascicular,* un *flux mediu* acelaşi prin toate spirele bobinei

$\Phi_t=N\Phi_f$ este *fluxul magnetic total* al unei bobine;

3.5 Teoremele de refracție a liniilor de câmp

I. Câmp electric

Dacă S_{12} este o joncțiune între două medii cu proprietăți diferite (permitivități ε_1 şi ε_2) şi este o suprafață de discontinuitate pasivă (neîncărcată cu sarcină, $\rho_S=0$), atunci la trecerea liniilor de câmp electric printr-o astfel de discontinuitate se conservă componenta normală a lui $\bar{D}$ (relația 3.57) şi componenta tangențială a lui $\bar{E}$ (relația 3.58): $E_{t_1}=E_{t_2}$; $D_{n_1}=D_{n_2}$. Unghiurile cu normala $\bar{n}$ la discontinuitate se numesc: $\alpha_1=\sphericalangle$ de incidență; $\alpha_2=\sphericalangle$ de refracție

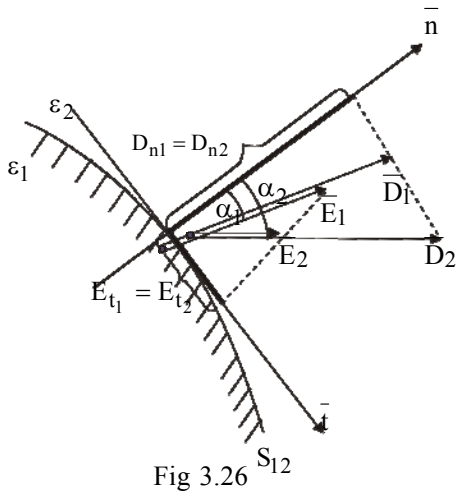


Fig 3.26

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{D_{t_1}}{D_{n_1}}=\frac{\varepsilon_1 E_{t_1}}{D_{n_1}}\ ;\ \operatorname{tg}\alpha_2=\frac{D_{t_2}}{D_{n_2}}=\frac{\varepsilon_2 E_{t_2}}{D_{n_2}}\rightarrow\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\qquad(3.61)$$

Relația (3.61) este *teorema de refracție a liniilor de câmp electric.* Evident că am admis că cele două regiuni sunt cu proprietăți liniare şi sunt izotrope (liniile lui $\bar{E}$ şi $\bar{D}$ sunt pe aceeaşi direcție.)

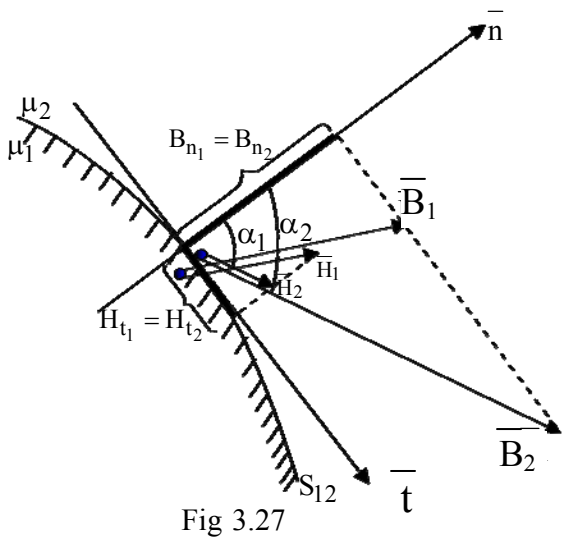


Fig 3.27

II. Câmp magnetic

Dacă există o suprafață de discontinuitate S_{12} pasivă (fară pânză de curent, $\bar{J}_s=0$) care separă două subdomenii liniare şi izotrope cu permeabilitățile μ_1 şi μ_2, (figura 3.27) atunci ținând seama de formele locale ale legilor (3.21) şi (3.44) valabile în punctele din jurul unei discontinuități, putem scrie:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\alpha_1=\dfrac{B_{t_1}}{B_{n_1}}=\dfrac{\mu_1 H_{t_1}}{B_{n_2}}\\ \operatorname{tg}\alpha_2=\dfrac{B_{t_2}}{B_{n_2}}=\dfrac{\mu_2 H_{t_2}}{B_{n_2}}\end{cases}\Rightarrow\qquad\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}\qquad(3.62)$$

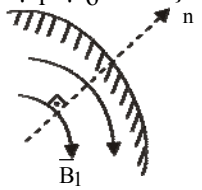
Relația (3.62) este expresia *teoremei de refracție a liniilor de câmp magnetic* la trecerea lor printr-o discontinuitate.

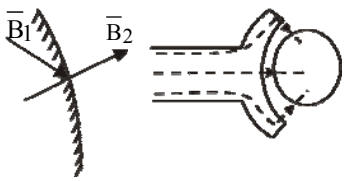
Dacă subdomeniul ① este feromagnetic atunci $\mu_1=\mu_{Fe}=\mu_r\cdot\mu_o\approx\infty$ şi din (3.62) rezultă:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}=\infty\ \Rightarrow$$

- •) $\alpha_1=\frac{\pi}{2}$, dar în acest caz nu mai există refracție
- •) $\alpha_2=0$, deci liniile de câmp magnetic ies şi intră $\perp$ pe suprafețele pieselor feromagnetice

(Această proprietate ne ajută să construim spectrul liniilor lui $\bar{B}$ atunci când sistemul conține piese feromagnetice)





3.6 Legea conservării sarcinii electrice

3.6.1 Formele integrale ale legii

→Dacă o suprafață Σ trece numai prin medii izolante (dielectrici) atunci suma algebrică a sarcinilor conținute în interiorul lui Σ este constantă indiferent de fenomenele (regimul de funcționare) care au loc în interior.

$$q_\Sigma = \sum q_k^{\pm} = ct \qquad (3.63)$$

→Dacă suprafața Σ este intersectată de fire conductoare parcurse de curenți de conducție (figura 3.28), atunci intensitatea curenților de conducție care ies din Σ (după normala exterioară) este egal numeric cu viteza de scădere a sarcinilor conținute în interiorul suprafeței Σ:

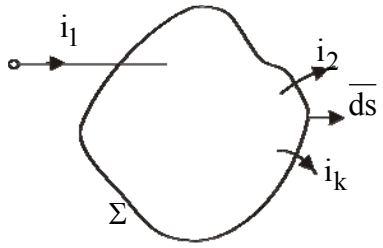


Fig 3.28

$$i_\Sigma = -\frac{dq_\Sigma}{dt} \qquad (3.64)$$

În forma integrală (3.64) i_Σ este suma algebrică a curenților care ies prin firele conductoare $(i_\Sigma = -i_1 + i_2 + ... + i_k + ...)$. Relațiile (3.63) şi (3.64) reprezintă *formele integrale compacte* ale legii.

Scriind curentul i_Σ în funcție de densitatea sa $\bar{J}$ şi sarcina q_Σ pe care o admitem repartizată în volumul ν_Σ cu densitatea ρ_v, atunci:

$$\int_\Sigma \bar{J}\,\overline{ds} = -\frac{d}{dt}\int_{\nu_\Sigma} \rho_v d\nu \qquad (3.65)$$

Suprafața Σ este, în general, mobilă cu viteza $\bar{v}$, odată cu corpurile încărcate, deci în membrul drept din (3.65) avem o derivată substanțială de volum:

$$\frac{d}{dt}\int_{\nu_\Sigma} \rho_v d\nu = \int_{\nu_{\Sigma_{fix}}} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} d\nu + \int_{\nu_{\Sigma_{mobil}}} \operatorname{div}(\rho_v \bar{v})\, d\nu =$$

$$= \int_{\nu_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t}\, d\nu + \int_\Sigma \bar{v}\, \rho_v\, \overline{ds} \qquad (3.66)$$

Înlocuind în (3.65) se obține:

$$\int_\Sigma \left(\bar{J} + \rho_v\, \bar{v}\right) \overline{ds} = \int_{\nu_\Sigma} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\, d\nu \;\leftrightarrow\; i_{cond_\Sigma} + i_{conv_\Sigma} = \int_{\nu_{\Sigma\ fix}} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} d\nu \qquad (3.67)$$

Relația (3.67) este *forma integrală dezvoltată* a legii. Conform

acestei legi sarcina electrică din volumul v_Σ, considerat fix în raport cu sistemul de referință, scade datorită curentului de conducție $(\bar{J})$ şi datorită curentului de convecție $(\rho_v \bar{v})$ care ies din suprafața Σ.

Transformând cu teorema lui Gauss membrul stâng (3.67) în integrală de volum, se obține:

$$\operatorname{div}(\bar{J}+\rho_v \bar{v}) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{3.68}$$

relație care reprezintă *forma locală* a legii conservării sarcinii electrice, valabilă în domenii de continuitate a mediului. Dacă nu există corpuri în mişcare, forma locală devine:

$$\operatorname{div} \bar{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{3.69}$$

iar în *regim staționar* (curent continuu, când $\frac{\partial}{\partial t} = 0$) rezultă:

$$i_\Sigma = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \operatorname{div} \bar{J} = 0 \tag{3.70}$$

relație cunoscută şi sub numele de *teorema continuității liniilor de curent;* liniile unui curent continuu sunt întotdeauna linii închise $(\operatorname{div} \bar{J} = 0)$.

În jurul suprafețelor de discontinuitate S_{12}, care separă două medii cu conductivități diferite σ_1 şi σ_2 (şi eventual încărcată discontinuitatea cu ρ_s, majoritatea joncțiunilor parcurse de curent, au $\rho_s \neq 0$) forma locală (3.69) devine: $\operatorname{div}_s \bar{J} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$ $\leftrightarrow$ $J_{n_2} - J_{n_1} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$ (3.71)

Dacă sistemul funcționează în curent continuu $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ sau este o joncțiune pasivă $(\rho_s = 0)$ atunci: $J_{n_1} = J_{n_2}$ (3.72)

deci la refracția liniilor de curent se conservă componenta normală a lui $\bar{J}$.

Observații:

- Prima teoremă a lui Kirchhoff este o consecință a acestei legi. Dacă suprafața Σ înconjură un nod de circuit, sarcina acumulată într-un nod fiind nulă, rezultă că $i_\Sigma = 0$.
- O suprafață Σ poate fi traversată atât de fire parcurse de *curent de conducție*, cât şi de corpuri încărcate cu sarcină – *curent de convecție* – sau liniile unui câmp electric variabil în timp – *curent de deplasare* – . Liniile de curent se pot considera închise în orice regim de funcționare (nu

numai în curent continuu) doar dacă se ține seama de toate formele fizice de curenți electrici posibili:

$$(i_{cond} + i_{conv} + i_{depl})_{\Sigma} = 0 \qquad (3.73)$$

De exemplu, în figura 3.29 $i_{\hat{i}}$ este curentul de *încărcare* a unui condensator (k – pe poziția 1). Până la armătura condensatorului el este curent de conducție prin fire. La încărcare sarcina din suprafața Σ crește, deci va crește şi câmpul dintre armături $\left(\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} > 0\right)$, respectiv curentul de deplasare care iese din Σ este egal cu curentul de conducție care intră. La descărcare (k – pe poziția 2), sarcina pe armături scade $\left(\frac{dq_{\Sigma}}{dt} < 0\right)$, scade şi câmpul $\left(\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} < 0\right)$ ceea ce înseamnă că şi curentul de deplasare din dielectric îşi va schimba sensul iar curentul de *descărcare* i_d este curent de deplasare şi în continuare este curent de conducție.

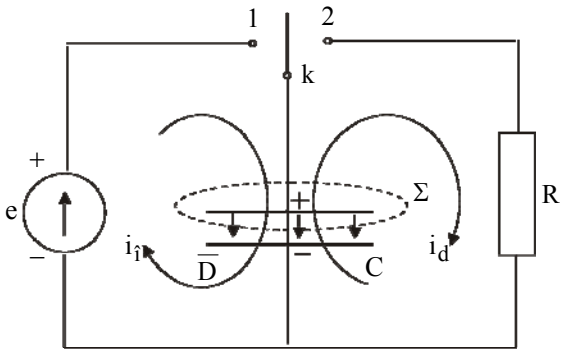


Fig 3.29

- Ecuațiile scrise în jurul punctelor de discontinuitate se mai numesc *ecuații de trecere*:

$$\begin{cases} D_{n_2} - D_n = \rho_s \\ E_{t_1} = E_{t_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{H}_{t_2} - \overline{H}_{t_1} = \overline{J}_s \\ B_{n_1} = B_{n_2} \end{cases} \quad J_{n_2} - J_{n_1} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \qquad (3.74)$$

Ele pun în evidență că doar componenta tangențială a lui $\overline{E}$ şi componenta normală a lui $\overline{B}$ se conservă necondiționat la trecerea lor (refracția) printr-o suprafață de discontinuitate. Celelalte componente D_n, H_t şi J_n se conservă doar condiționat, aşa cum au precizat legile câmpului.

3.7 Legea conducției electrice

- La scară microscopică asupra unei particule libere dintr-un mediu conductor încărcată cu sarcina q' se exercită o forță electrică $\overline{F}_{el} = q'\overline{E}$ de către câmpul electric $\overline{E}$ din interiorul conductorului (figura 3.30) şi o forță neelectrică $\overline{F}_{neel}$ datorită altor fenomene din interiorul conductorului (neomogenități, stare de accelerare, diferență de temperatură, etc). Particula q' va fi în echilibru electrostatic doar dacă $\overline{F}_{el} + \overline{F}_{neel} = 0$. Dacă $\overline{F}_{el} = q'\overline{E}$ vom exprima şi forțele neelectrice sub forma: $\overline{F}_{neel} = q'\overline{E}_i = q'\overline{E}_{str}$, unde $\overline{E}_i(\overline{E}_{str})$ se numeşte *intensitatea câmpului electric imprimat (străin).*

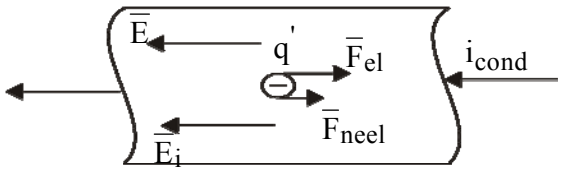


Fig 3.30

Câmpul imprimat $\overline{E}_i$ este un câmp electric echivalent, el echivalează acțiuni neelectrice ce se exercită asupra particulelor libere. Câmpul $\overline{E}_i$ exprimă în termeni electrici efectul altor stări (chimice, termice, mecanice) şi el se consideră „dat" în studiul fenomenelor electrice, deducerea lui $\overline{E}_i$ nu ține de teoria fenomenelor electrice. În general, câmpul $\overline{E}_i$ există în regiunile conductoare active, în interiorul surselor de tensiune (pile, acumulatoare, celule solare, etc).

- Sub acțiunea forței rezultante $\overline{F}_{rez} = \overline{F}_{el} + \overline{F}_{neel}$ particula q' se mişcă cu viteza $\tilde{v}_{rel}$ față de structura fixă a conductorului. Mişcarea microscopică ordonată a particulelor q' supuse ciocnirilor dezordonate se echivalează cu mişcarea macroscopică a unui corp într-un mediu vâscos, cu frecare, când forța activă este proporțională cu viteza medie. Mişcarea ordonată a particulelor q' este apreciată macroscopic ca un curent de conducție cu densitatea $\overline{J}$: $\overline{J} = k_1\overline{v}_{rel} = k_2(\overline{F}_{el} + \overline{F}_{neel}) = k_2 q'(\overline{E} + \overline{E}_i)$

respectiv: $$\overline{J} = \sigma(\overline{E} + \overline{E}_i) \quad ; \quad \overline{E} + \overline{E}_i = \rho\,\overline{J} \qquad (3.75)$$

unde: $\begin{cases} \sigma & \text{- } \textit{conductivitatea} \text{ mediului conductor} \\ \rho = \dfrac{1}{\sigma} & \text{- } \textit{rezistivitatea} \text{ mediului conductor} \end{cases}$

Legea conducției electrice este o lege de material (expresia sa conține constante de material, σ(sau ρ) care diferă de la un domeniu la altul) şi conform cu justificarea microscopică (3.75) ea spune că „în orice punct dintr-un mediu conductor, densitatea curentului de conducție $\overline{J}$ este proporțională cu intensitea câmpului electric rezultant ($\overline{E} + \overline{E}_i$) din acel punct".

$$\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_i) \quad ; \quad \bar{E} + \bar{E}_i = \rho\ \bar{J} \tag{3.76}$$

Relațiile (3.76) reprezintă *forma locală* a legii (valabilă într-un punct din domeniu conductor).

Experiența arată că cele două constante de material σ şi ρ nu depind numai de natura materialului ci şi de temperatură. Variația cu temperatura a rezistivității ρ este mică şi că în jurul unei temperaturi de referință T_o variația este aproximativ liniară, respectiv dezvoltarea în serie a lui $\rho(T)$ se poate aproxima cu primul cu termen:

$$\rho(T) = \rho(T_o)[1 + \alpha(T - T_o)] \tag{3.77}$$

„α" este *coeficientul de variație a rezistivității cu temperatura:*

$\alpha > 0$ – pentru metale, deci ρ creşte cu temperatura,conduc mai bine în stare rece

$\alpha < 0$ – pentru cărbune, soluții, deci ρ scade cu temperatura,conduc mai bine în stare caldă

La unele metale (plumb, thaliu, etc) ρ scade la zero la temperaturi foarte mici, când materialul ajunge în stare de *supraconductibilitate.* Valoarea temperaturii critice la care $\rho = 0$ depinde de metal dar şi de valoarea câmpului $\bar{B}$ în care este plasat. În această stare materialele suportă densități foarte mari de curent, fără a se încălzi, în ele se pot concentra câmpuri foarte intense; de astfel de fenomene se ocupă o nouă disciplină – *crioelectrotehnica.*

În conductoare omogene $(\bar{E}_i = 0)$, forma locală a legii devine:

$$\bar{J} = \sigma\bar{E} \quad ; \quad \bar{E} = \rho\ \bar{J} \tag{3.78}$$

Considerăm un tronson de circuit filiform care cuprinde între punctele m şi n o regiune cu câmp imprimat (o sursă), tronson care face parte dintr-un circuit închis, deci este parcurs de curentul i.

Conductor filiform înseamnă că liniile de curent $\bar{J}$ se distribuie uniform pe secțiunea sa transversală $\left(J = \frac{i}{A}\right)$ şi în acest caz putem considera că întregul curent este concentrat în curba C (axa tronsonului) şi $\bar{J} \parallel \overline{d\ell}$.

Vom integra forma locală (3.76), membru cu membru, de-a lungul curbei C:

$$\int_1^2 \left(\overline{E} + \overline{E}_i\right)\overline{d\ell} = \int_1^2 \rho\,\bar{J}\,\overline{d\ell} \tag{3.79}$$

Notăm:

-) $u_f = u_{f_{12}} = \int_1^2 \overline{E}\,\overline{d\ell}$ – *tensiunea electrică în lungul firului*

-) $e_i = \int_1^2 \overline{E}_i\,\overline{d\ell} = \int_m^n \overline{E}_i\,\overline{d\ell}$ – *t.e.m imprimată* care este localizată pe porțiunea m – n a curbei C.

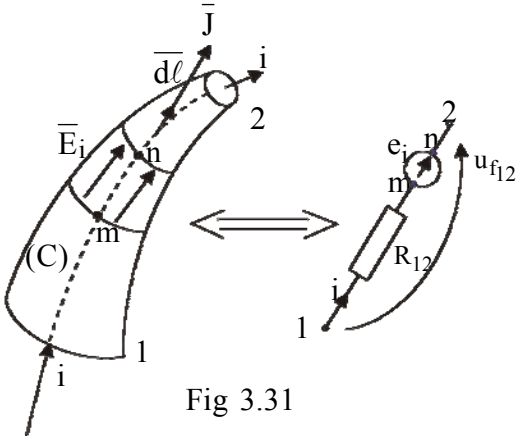


Fig 3.31

$$\int_1^2 \rho\,\overline{J}\,\overline{d\ell} = \int_1^2 \rho\frac{i}{A}\,d\ell = i\int_1^2 \rho\frac{d\ell}{A} = R_{12}\cdot i$$

$R_{12} = R = \int_1^2 \rho\frac{d\ell}{A}$ – este *rezistența electrică* a tronsonului 1–2 .

Cu notațiile făcute, relația 3.79 se poate scrie astfel:

$$u_f + e_i = R\cdot i \qquad (3.80)$$

care este *forma integrală* a legii conducției electrice care precizează că „pe o porțiune neramificată de circuit, suma dintre tensiunea electrică în lungul firului (u_f) şi t.e.m imprimată (e_i) a surselor ce se găsesc pe acea porțiune de circuit, este egală cu produsul dintre rezistența electrică a tronsonului şi intensitatea curentului i".

În teoria circuitelor electrice, relația (3.80) este numită *ecuația de tensiuni pentru o latură activă de circuit* , tronsonul poate fi echivalat cu un circuit electric echivalent, ca în figura 3.31.

Dacă conductorul este închis, curba C devine o curbă închisă Γ şi: $u_f + e_i = e_\Gamma = e$ *numită t.e.m de contur* şi: $e_\Gamma = R\cdot i_\Gamma$. Dacă circuitul este pasiv (fără câmp imprimat, $e_i = 0$) rămâne: $u_f = R\cdot i$.

În curent continuu (sau joasă frecvență) există noțiunea de *potențial electric* V şi tensiunea între capetele 1 şi 2 ale circuitului nu depinde de drumul de integrare: $u_f = \int_1^2 \overline{E}\,\overline{d\ell} = V_1 - V_2 = u_b$, mărimea u_b numindu-se *tensiunea la bornele laturii de circuit*. În acest caz particular se poate scrie:

$$u_b = R\cdot i \quad ; \quad i = \frac{u_b}{R} \qquad (3.81)$$

Această formă particulară a legii conducţiei electrice este cunoscută în literatură sub numele de *legea lui Ohm*. Pentru circuite liniare (când R=ct) dependenţa $u_b = f(i)$ este o funcţie liniară. Când $R(u)$ sau $R(i)$ avem un circuit neliniar, respectiv $u_b(i)$ are o aliură neliniară.

Rezistenţa unui tronson de circuit are expresia:

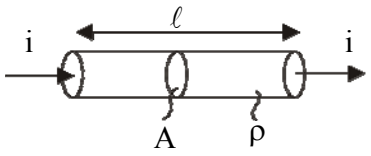


Fig 3.32

$$R_{12} = \int_1^2 \rho \frac{d\ell}{A} \quad [\Omega] \qquad (3.82)$$

Dacă conductorul este omogen $(\rho = ct)$ şi în lungul liniilor de curent secţiunea conductorului rămâne constantă (figura 3.32) atunci:

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \qquad (3.83)$$

Dimensional se obţine:

$$[\rho] = \left[\frac{R\,A}{\ell}\right] = \begin{cases} \Omega\ m \\ \dfrac{\Omega\ mm^2}{m} \end{cases}$$ - dacă secţiunea A se exprimă în mm^2

Conductanţa tronsonului de circuit este:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{A}{\rho\,\ell} = \frac{\sigma\,A}{\ell} \quad \left[\Omega^{-1}\right] \quad ; \quad 1\Omega^{-1} = 1S = 1Mho \qquad (3.84)$$

Pentru piese conductoare cu o formă oarecare se poate aplica *metoda tuburilor şi feliilor* pentru calculul lui R sau G (Tubes and Slices Method).

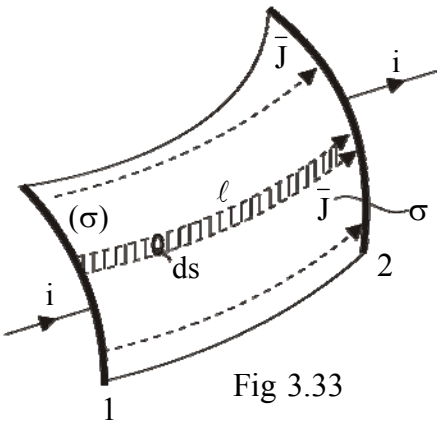


Fig 3.33

Tuburile de curent sunt porţiuni de conductor cu secţiune infinitezimală „ds" şi sunt luate în lungul liniilor de curent $\bar{J}$ (figura 3.33). Un tub are lungimea „ℓ" şi diferă de la o linie de curent la alta.

Conductanţa unui tub este:

$$dG_{tub} = \frac{\sigma ds}{\ell} \qquad (3.85)$$

Diversele tuburi elementare sunt parcurse de curent într-o conexiune paralel, deci:

$$G = \int dG = \int_{S_{cond}} \frac{\sigma \, ds}{\ell} \qquad (3.86)$$

ℓ – este o funcție ce exprimă lungimea liniilor de curent $\bar{J}$ ca funcții de geometria dispozitivului.

Feliile de curent dintr-un dispozitiv se consideră de grosime „$d\ell$” infinitezimală şi sunt luate $\perp$ pe liniile lui $\bar{J}$ (figura 3.34). Rezistența unei felii este:

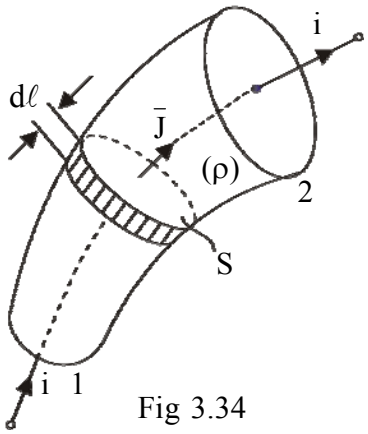


Fig 3.34

$$dR_{felie} = \rho \frac{d\ell}{S} \qquad (3.87)$$

iar pentru întregul dispozitiv feliile sunt conectate în serie:

$$R = \int dR = \int_1^2 \rho \frac{d\ell}{S} \qquad (3.88)$$

aici „S” este o funcție care indică variația secțiunii dispozitivului în lungul liniilor de curent.

Dacă „ℓ” în (3.86) şi „S” în (3.88) sunt greu de apreciat, atunci întregul dispozitiv se aproximează cu câteva (n) tuburi având (ΔG_k) sau câteva felii având (ΔR_k) şi pentru tot dispozitivul vom avea:

$$G = \sum_1^n \Delta G_k = \sum_1^n \frac{\sigma_k \Delta S_k}{\ell_k}; \quad R = \sum_1^n \Delta R_k = \sum_1^n \frac{\rho_k \Delta \ell_k}{S_k} \qquad (3.89)$$

3.8 Legea transormării energiei în conductori

Experimental se constată că la trecerea curentului electric printr-un mediu conductor energia electrică se transformă în alte forme de energie (termică, chimică, etc). Un conductor parcurs de curent se încălzeşte „energia cedată în unitatea de timp (puterea p_j) şi în unitatea de volum a conductorului (puterea specifică W/m^3) de către câmpul electromagnetic în procesul de conducție, este egală cu produsul scalar dintre $\bar{E}$ şi $\bar{J}$”.

$$p_j = \bar{E} \cdot \bar{J} \qquad (3.90)$$

Forma locală (3.90) a legii scrisă dimensional reprezintă:

$$[p] = [E] \cdot [J] = \frac{V}{m} \cdot \frac{A}{m^2} = \frac{W}{m^3}$$

Sub forma (3.90) legea este valabilă în conductori omogeni sau neomogeni, izotropi sau anizotropi, liniari sau neliniari.

Observaţie:

Acestei legi i se poate da o justificare (interpretare) microscopică: câmpul electric rezultant cheltuie un lucru mecanic δL pentru a mişca o particulă elementară q' în timpul dt pe direcţia $d\ell$:

$$\delta L = \overline{F}\,\overline{d\ell} = q'\,\overline{E}\,\overline{d\ell} \qquad (3.91)$$

relaţie care pentru unitatea de volum devine un lucru mecanic specific:

$$\delta L_{sp} = \rho_v\,\overline{E}\,\overline{d\ell} = p_j dt$$

Viteza medie a particulei (între două ciocniri) faţă de conductor este $\overline{v}_{rel}$, deci:

$$\overline{d\ell} = \tilde{v}_{rel} \cdot dt;\ \overline{J} = \rho_v \tilde{v}_{rel} \rightarrow \rho_v\,\overline{d\ell} = \overline{J}\,dt \rightarrow \overline{E}\ \overline{J} = p_j \qquad (3.92)$$

Ceea ce microscopic reprezintă curent de convecţie $(\rho_v \tilde{v}_{rel})$, macroscopic este privit ca un curent de conducţie $\overline{J}$.

Puterea specifică p_j este efectul macroscopic al lucrului mecanic specific, cheltuit de câmp pentru a transporta particulele libere prin conductor. Ciocnirile microscopice dau un efect macroscopic de încălzire a piesei conductoare.

Pentru conductori neomogeni: $\overline{E} + \overline{E}_i = \rho\overline{J} \quad \rightarrow \quad \overline{E} = \rho\overline{J} - \overline{E}_i$

$$p_j = \rho J^2 - \overline{E}_i \overline{J} = p_r - p_g \qquad (3.93)$$

unde: $p_r = \rho J^2 \geq 0$ este densitatea de volum a puterii pierdută ireversibil de câmpul electromagnetic sub formă de căldură prin *efect electrocaloric ireversibil (efect Joule).*

$$p_g = \overline{E}_i \overline{J} = \begin{cases} + & \text{dacă } \overline{E}_i \text{ şi } \overline{J} \text{ sunt omoparaleli; puterea cedată de sursă şi primită de câmp} \\ & \text{dacă } \overline{E}_i \text{ şi } \overline{J} \text{ sunt antiparaleli, liniile lui } \overline{J} \text{ au sens} \\ - & \text{contrar cu } \overline{E}_i, \text{ sursa absoarbe putere (sursa pusă la încărcat)} \end{cases}$$

În conductoare omogene $(\overline{E}_i = 0)$ rezultă: $p_j = p_r = \rho J^2$ (3.94)

Forma integrală a legii se obține integrând forma locală (3.90) pe tot volumul conductorului parcurs de curent. Conductorul fiind filiform, $i = JA$ şi de asemenea $\bar{J} \parallel \overline{d\ell} \parallel \bar{E}$.

Puterea absorbită de întregul tronson (figura 3.35) este:

$$\begin{cases} P_j = \int_{v_{cond}} p_j dv = \int_v \bar{E}\,\bar{J}\,dv = \int_1^2 EJ(Ad\ell) = \int_1^2 Eid\ell = i\int_1^2 \bar{E}\,\overline{d\ell} = u_f \cdot i \\ P_j = u_f \cdot i \end{cases} \quad (3.95)$$

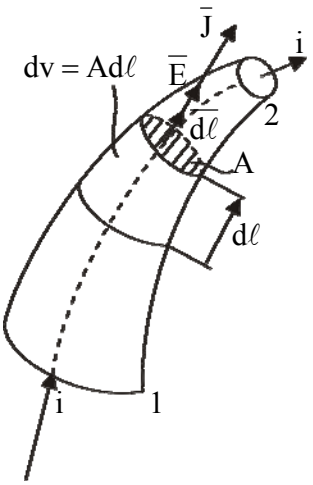


Fig 3.35

Forma (3.95) reprezintă *forma integrală* a legii. Ținând seama de forma integrală (3.80) a legii conducției electrice $(u_f = Ri - e_i)$ avem:

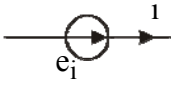
$$P_j = R \cdot i^2 - e_i \cdot i = P_R - P_G \quad (3.96)$$

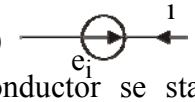
unde:

–) $P_R = Ri^2 = \int_{v_{cond}} p_r dv = \int_{v_{cond}} \rho J^2 dv \geq 0$ este puterea disipată sub formă de căldură pe rezistența R parcursă de curentul i ($P_R = Ri^2$) este „legea" Joule-Lenz.

Căldura produsă în timpul $\Delta t = t_2 - t_1$ este:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2 dt \quad [J]$$

–) $P_G = e_i \cdot i =$ { (+)  sursa produce puterea electrică $(e_i \cdot i)$

(–)  sursa consumă puterea electrică $(e_i \cdot i)$

Dacă printr-un conductor se stabileşte un curent variabil, de exemplu sinusoidal, atunci şi densitatea de curent are o variație sinusoidală:

$$J = J_{max} \sin \omega t = \sqrt{2}\, J_{ef} \sin \omega t$$

Puterile transformate în căldură au expresiile:

$$p_j = \rho\, J_{ef}^2 \quad ; \quad P_j = \int_{v_{cond}} \rho\, J_{ef}^2\, dv = R\, I_{ef}^2 \quad (3.97)$$

Pentru orice formă de variație în timp a lui $J(t)$, pierderile depind de J_{ef}^2. Sau, dacă lucrăm cu funcțiile $J(t)$ şi $i(t)$ atunci:

$$\begin{cases} p'_j = \rho J^2(t) \quad \rightarrow \quad P'_j(t) = \int_v \rho J^2(t) d\upsilon \quad \rightarrow \quad P_j = \frac{1}{T}\int_0^T P'_j(t)dt \\ P'_R(t) = Ri^2(t) \quad \rightarrow \quad P_R = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)dt = RI_{ef}^2 \end{cases} \tag{3.98}$$

3.9 Legea polarizației electrice temporare

Polarizarea este un fenomen specific corpurilor dielectrice (izolanți). Exceptând polarizare permanentă (care are cauze neelectrice), polarizarea temporară apare ca urmare a introducerii corpurilor într-un câmp electric exterior de intensitate $\overline{E}$. Legea polarizației temporare este o lege de material care exprimă local (punct cu punct) dependența polarizației temporare $\overline{P}_t$ de intensitatea câmpului electric $\overline{E}$.

Relația $\overline{P}_t = \overline{P}_t(\overline{E})$ se poate stabili experimental, cu aproximație, în anumite limite de variație a lui $\overline{E}$ şi a condițiilor neelectrice. După forma acestei relații, dielectricii se împart în liniari şi neliniari, respectiv izotropi şi anizotropi.

3.9.1 Materiale liniare şi izotrope

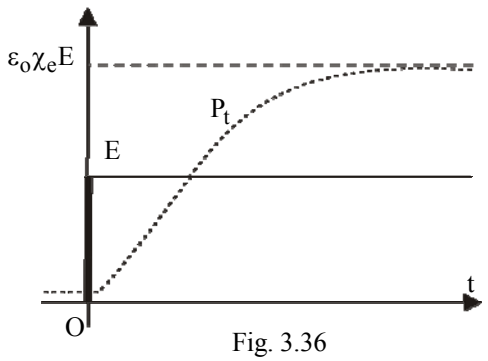


Fig. 3.36

Sub acțiunea câmpului $\overline{E}$, un material liniar şi izotrop se polarizează pe direcția câmpului $\overline{E}$, polarizația fiind proporțională cu intensitatea câmpului:

$$\overline{P}_t = \varepsilon_o \chi_e \overline{E} \tag{3.99}$$

unde χ_e este *susceptivitatea electrică relativă*, mărime ce indică pentru un material cât este de susceptibil a se polariza la introducerea sa în câmpul $\overline{E}$.

Forma (3.99) este valabilă în regim static sau lent variabil; în regim variabil $\overline{P}_t$ rămâne în urma lui $\overline{E}$ *(postefect, vâscozitate electrică, trenaj*

electric) şi efectul este utilizat pentru încălzirea dielectrică a corpurilor. De exemplu în figura 3.36, la aplicarea unei trepte de câmp $\overline{E}$, polarizaţia atinge valoarea dată de $\overline{E}$ abia după un timp. Dacă $E = E_{max} \sin \omega t$ şi polarizaţia va avea o variaţie sinusoidală dar defazată din cauza postefectului: $P_t(t) = \varepsilon_o \cdot \chi_e(\omega) \cdot E_{max} \sin[\omega t - \varphi(\omega)]$

atât susceptivitatea χ_e cât şi defazajul φ depind de frecvenţa câmpului electric. La materiale *dialectrice* χ_e este mic şi nu variază cu temperatura iar la cele *paraelectrice* χ_e este mare şi depinde de temperatură $\left(\chi_e = \frac{c}{T} - \text{legea Curie}\right)$ şi de frecvenţă.

3.9.2 Materiale liniare şi anizotrope

La astfel de materiale polarizaţia $\overline{P}_t$ nu mai are direcţia lui $\overline{E}$:

$$\overline{P}_t = \varepsilon_o \, \overline{\overline{\chi}}_e \, \overline{E} \tag{3.100}$$

Fiecare direcţie din cristal are o anumită susceptivitate, deci χ_e nu mai este o constantă (scalar) ci tensor. Dacă direcţia lui $\overline{E}$ coincide cu una dintre axele proprii ale cristalului, se va produce o polarizaţie foarte puternică pe direcţia respectivă.

Pentru *dielectrici neliniari* $P_t = f(E)$ este o funcţie neliniară, în general de forma unui histerizis. Aceste materiale au susceptivităţi χ_e foarte mari.Corelând legea legăturii în câmp electric:

$$\overline{D} = \varepsilon_o \, \overline{E} + \overline{P} = \varepsilon_o \, \overline{E} + \overline{P}_t + \overline{P}_p$$

cu legea polarizaţiei temporare, se obţin dependenţele:

- *Materiale liniare:*

$$\overline{D} = \varepsilon_o \, \overline{E} + \varepsilon_o \chi_e \, \overline{E} + \overline{P}_p = \varepsilon_o (1 + \chi_e) \, \overline{E} + \overline{P}_p =$$

$$= \varepsilon_o \varepsilon_r \, \overline{E} + \overline{P}_p = \varepsilon \, \overline{E} + \overline{P}_p \tag{3.101}$$

unde: $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ este *permitivitatea relativă* $(\chi_e = \varepsilon_r - 1)$

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_o$ este *permitivitatea absolută* a mediului

Cum la toate materialele dielectrice $\varepsilon_r \geq 1 \rightarrow \chi_e \geq 0$, deci toate se polarizează pe direcţia câmpului $\overline{E}$ şi întăresc câmpul în care au fost plasate.

În lipsa polarizației permanente $(\overline{P}_p = 0)$ rămâne:

$$\overline{D} = \varepsilon\, \overline{E} \tag{3.102}$$

- *Materiale anizotrope:*

$$\overline{D} = \varepsilon_o\, \overline{E} + \varepsilon_o \overline{\overline{\chi}}_e\, \overline{E} + \overline{P}_p = \varepsilon_o(1 + \overline{\overline{\chi}}_e)\, \overline{E} + \overline{P}_p = \varepsilon_o \overline{\overline{\varepsilon}}_r\, \overline{E} + \overline{P}_p = \overline{\overline{\varepsilon}}\ \ \overline{E} + \overline{P}_p \tag{3.103}$$

iar în lipsa polarizării permanente:

$$\overline{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\, \overline{E} \tag{3.104}$$

- *Material neliniare:*

$$\overline{D} = \varepsilon_o\, \overline{E} + \varepsilon_o \chi_e(E)\, \overline{E} + \overline{P}_p = \varepsilon_o(1 + \chi_e(E))\, \overline{E} + \overline{P}_p =$$

$$= \varepsilon_o \varepsilon_r(E)\, \overline{E} + \overline{P}_p = \varepsilon(E)\, \overline{E} + \overline{P}_p \tag{3.105}$$

iar în lipsa polarizării permanente: $\overline{D} = \varepsilon\,(E) \cdot \overline{E}$ (3.102)

3.10 Legea magnetizației temporare

Este o lege de material care exprimă dependența locală dintre magnetizația temporară $\overline{M}_t$ şi intensitatea câmpului magnetic $\overline{H}$; $\overline{M}_t = \overline{M}_t(\overline{H})$. Forma acestei relații depinde de material şi de condițiile nemagnetice.

– *materiale liniare şi izotrope*: $\overline{M}_t = \chi_m \overline{H}$ (3.107)

χ_m – *susceptibilitate magnetică relativă*

Combinat cu legea legăturii în câmp magnetic:

$\overline{B} = \mu_o(\overline{H} + \overline{M}) = \mu_o(\overline{H} + \overline{M}_t + \overline{M}_p)$, se obține:

$$\overline{B} = \mu_o\, \overline{H} + \mu_o \chi_m\, \overline{H} + \mu_o\, \overline{M}_p = \mu_o(1 + \chi_m)\, \overline{H} + \mu_o\, \overline{M}_p =$$

$$= \mu_o \mu_r\, \overline{H} + \mu_o\, \overline{M}_p = \mu\, \overline{H} + \mu_o\, \overline{M}_p\,;\ \overline{M}_p = 0 \ \rightarrow\ \overline{B} = \mu \overline{H} \tag{3.108}$$

unde: $\mu_r = 1 + \chi_m$ este *permeabilitatea relativă* $(\chi_m = \mu_r - 1)$

$\mu = \mu_r \mu_o$ este *permeabilitatea absolută* a mediului

- $\mu_r < 1$ – materiale diamagnetice ; $\rightarrow\ \chi_m < 0$ — se magnetizează invers cu $\overline{H}$ şi slăbesc astfel câmpul $\overline{H}$.
- $\mu_r > 1$ – matriale paramagnetice ; $\rightarrow\ \chi_m > 0$ — se magnetizează pe direcția lui $\overline{H}$ şi-l întăresc în acest fel.

– *materiale anizotrope*:

$$\begin{cases} \overline{M}_t = \overline{\overline{\chi}}_m \, \overline{H} \\ \overline{B} = \mu_o \left(1 + \overline{\overline{\chi}}_m\right) \overline{H} + \mu_o \, \overline{M}_p = \mu_o \overline{\overline{\mu}}_r \, \overline{H} + \mu_o \, \overline{M}_p = \overline{\overline{\mu}} \, \overline{M} + \mu_o \, \overline{M}_p \\ \overline{M}_p = 0 \quad \rightarrow \quad \overline{B} = \overline{\overline{\mu}} \, \overline{H} \end{cases} \qquad (3.109)$$

– *materiale neliniare:*

$$\begin{cases} \overline{M}_t = \chi_m(H) \, \overline{H} \\ \overline{B} = \mu_o(1 + \chi_m(H)) \overline{H} + \mu_o \overline{M_p} = \mu_o \mu_r(H) \, \overline{H} + \mu_o \overline{M}_p = \\ \quad = \mu(H) \overline{H} + \mu_o \overline{M}_p \\ \overline{M}_p = 0 \;\rightarrow\; \overline{B} = \mu(H) \, \overline{H} \end{cases} \qquad (3.110)$$

Dintre materialele neliniare frecvent utilizate în tehnică sunt materialele feromagnetice şi materialele ferimagnetice (feritele).

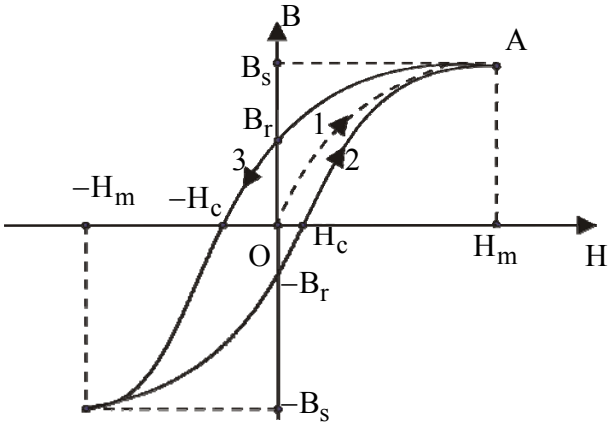


Fig 3.37

Materiale feromagnetice

Materialele feromagnetice sunt fierul, cobaltul, nichelul şi aliajele lor; ele au valori mari ale permeabilității relative $\mu_r \approx 10^5$ iar dependența B=f(H) este de forma unei curbe histerezis (figura 3.37).

Ramura 1 este curba de primă magnetizare, plecând din origine, cu materialul demagnetizat şi până se atinge saturația $B = B_s$ în punctul A.

Ramurile 2,3 – variația lui B la creşterea sau scăderea câmpului exterior H.

B_s – *inducția de saturație*

B_r – *inducția remanentă*, cea care rămâne la anularea câmpului exterior H.

H_m – valoarea maximă pentru care se atinge saturația

H_c – *câmp coercitiv*, valoarea câmpului de sens contrar care anulează inducția remanentă.

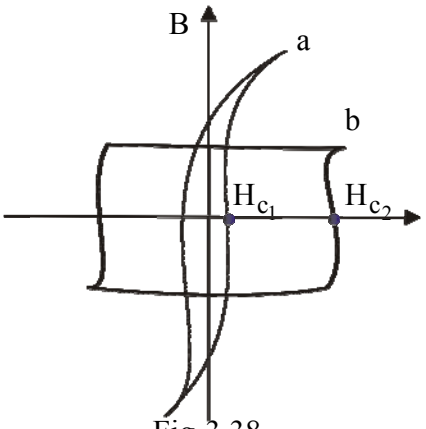


Fig 3.38

În funcție de valorile lui H_c o curbă histerezis este mai îngustă sau mai lată. Pentru o magnetizare reversibilă până la saturație se cheltuie o energie; *pierderile prin histerezis* reprezintă puterea consumată pentru a magnetiza unitatea de volum a materialului şi ele sunt proporționale cu aria ciclului histerezis.

Materialele cu ciclu histerezis îngust $\left(H_{c_1} = 1\,\text{Oe}\right)$ şi $\mu_r >>$ se numesc *materiale moi*. Ele se magnetizează uşor, aria ciclului histerezis (curba „a" din figura 3.38) este mică. Din astfel de materiale se confecționează miezurile pentru maşini electrice, transformatoare, aparate electrice şi se prezintă sub formă de tole magnetice cu grosimi de (0,1– 0,35) mm pentru a limita intensitatea curenților turbionari care se induc în tolă.

Materialele cu ciclu histerezis lat ($H_{c_2} \approx 50\,\text{Oe}$) ca în curba b din figura 3.38 se numesc *materiale dure* . Aria ciclului histerezis este mare, se magnetizează greu, cu consum mare de energie, dar se şi demagnetizează greu. Din astfel de materiale (oțeluri speciale) se realizează magneții permanenți.

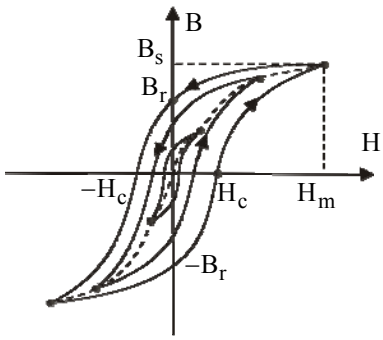


Fig 3.39

Termenii de *dur* şi *moale* se referă la proprietățile magnetice şi nu la cele mecanice.

Variind pe H într-un sens şi altul se pot trasa diferite cicluri histerezis intermediare. Există un *ciclu histerezis limită* care duce la atingerea saturației B_S şi care le cuprinde în interiorul său pe toate ciclurile intermediare; numai intersecția acestuia cu axele caracterizează materialul $\left(B_r, H_c\right)$ ca în figura 3.39.

Caracteristica ce trece prin vârful tuturor curbelor histerezis intermediare se numeşte *caracteristica de magnetizare fundamentală* sau *curba tehnică de magnetizare*, indicată de firma producătoare şi *în raport* cu care se defineşte permeabilitatea magnetică a materialului (figura 3.40) .

$(\mu_{r_s})_A = \dfrac{B_A}{\mu_o H_A} = k_1 \operatorname{tg}\alpha$ – permeabilitatea *statică* în punctul A

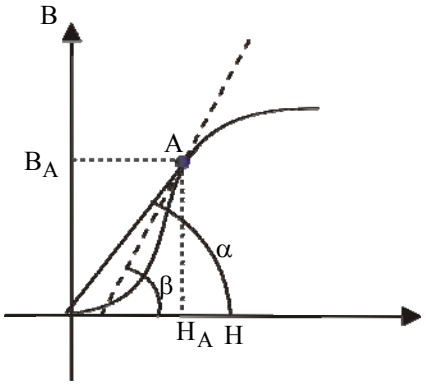


Fig 3.40

$$(\mu_{r_d})_A = \begin{cases} \left(\dfrac{dB}{dH}\right)_A = k_2 \operatorname{tg}\beta & \text{-permeabilitatea} \\ & \textit{dinamică} \text{ în punctul A} \\ \dfrac{dB}{dH} = \dfrac{d(\mu_{st} H)}{dH} = \mu_{st} + H\dfrac{d\mu_{st}}{dH} \end{cases}$$

respectiv în maximul lui μ_{st} se intersectează cele două curbe μ_{st} şi μ_d ca în figura 3.41.

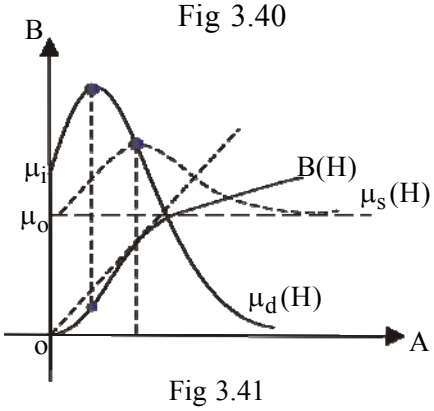


Fig 3.41

Materialele feromagnetice au o *stare solidă cristalină* (există materiale anizotrope cu cristale orientate prin laminare la rece care au μ_r foarte mare pe acea direcție). Ele *se magnetizează uşor* până la saturație (figura 3.42) care se atinge la $H_{m_1} \approx 100\,\text{Oe}$, față de materialele paramagnetice pentru care $H_{m_2} \approx 10^9$ Oe, mult peste valorile de câmp care se pot realiza astăzi (maxim 10^6 Oe).

Materialele feromagnetice îşi pierd proprietățile magnetice dacă sunt încălzite peste temperatura critică (*punctul Curie*) care pentru fier este 760^oC, pentru nichel 360^oC, când devin paramagnetice. Practic demagnetizarea unui material nu se realizează prin încălzire, ci se magnetizează până la saturație şi apoi este supus unor câmpuri alternative de amplitudine din ce în ce mai mică, până se ajunge în origine.

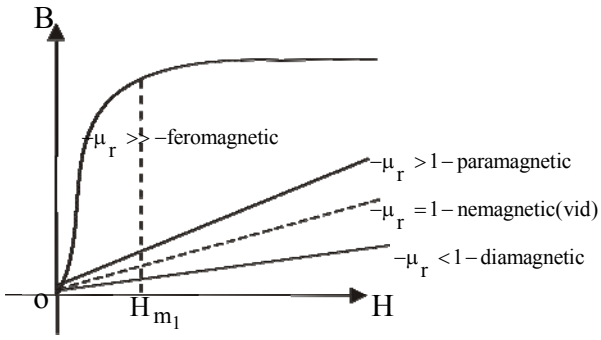


Fig 3.42

Feritele sunt materiale ceramice obținute prin sinterizare la (1000–1400)^{o}C a unor amestecuri de oxizi bivalenți amestecați cu răşini, toate sub

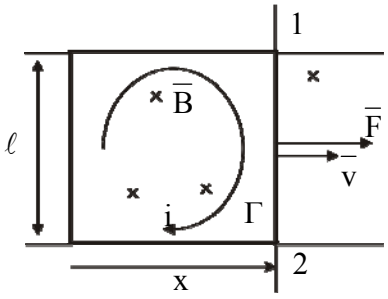


Fig 3.43

formă de pulbere. Ele au $B_S \approx (0{,}4–0{,}5)T$, deci mai mici ca la feromagneți (1~1,2)T. Ele au rezistivitate mare $\rho \approx 10^6 \Omega m$ (feromagneți: $\rho \approx 10^{-6} \Omega m$) fiindcă particulele metalice sunt separate prin pelicule de răşini. Ele se utilizează ca miezuri magnetice în tehnica frecvențelor înalte (nu mai apar curenți turbionari). Se utilizează pentru: miezuri de transformatoare şi micromotoare, antene magnetice, memorii magnetice etc.

3.11 Aplicații

1. Sub acțiunea unei forțe $\bar{F}$ o bară de lungime ℓ lunecă pe un cadru conductor într-un câmp exterior $\bar{B}$. Care trebuie să fie legea de mişcare a barei pentru ca prin cadru să treacă un curent constant ($i = I_o$).

În bara mobilă se induce o tensiune electromotoare de mişcare:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \left(\bar{v}\times\bar{B}\right)\bar{d\ell} = \int_{1_{(\Gamma)}}^{2} \underbrace{\left(\bar{v}\times\bar{B}\right)\bar{d\ell}}_{-vBd\ell} = -vB\int_1^2 d\ell = -vB\ell$$

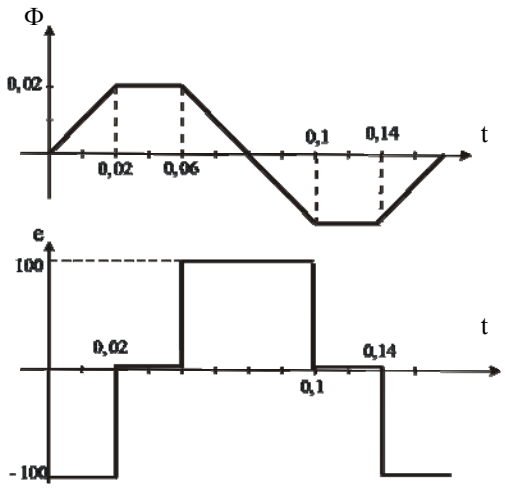
$$\begin{cases} R_\Gamma = 2\rho\dfrac{\ell+x}{A} \text{ - este rezistența electrică a curbei } \Gamma \\ v = \dfrac{dx}{dt} \text{ - este viteza instantanee a barei} \end{cases}$$

$$e_\Gamma = vB\ell = R_\Gamma \cdot i = 2\rho\frac{\ell+x}{A}\cdot I_o \quad \rightarrow \quad v = \frac{2\rho I_o}{A\ell B}x + \frac{2\rho I_o}{A\ell B} = k(x+1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k(x+1) \\ t = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \frac{dx}{x+1} = kdt \quad \rightarrow \quad x = e^{kt} - 1 \quad \rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = ke^{kt}$$

respectiv viteza trebuie să crească exponențial pentru a se respecta condiția din enunțul problemei, iar forța care producce mişcare este: $F = ma = m\dfrac{dv}{dt} = mk^2e^{kt}$, deci tot exponențială .

2. Fluxul magnetic Φ ce trece prin cele N = 100 spire ale unei bobine plate variază în timp ca în figura 3.44. Să se construiască funcția e(t) – tensiunea electromotoare indusă la bornele bobinei.



Tensiunea electromotoare indusă este :

$$e = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -100\frac{0.02}{0.02} = -100V$$

când fluxul creşte ($\Delta\Phi > 0$), respectiv e = 100V când fluxul scade ($\Delta\Phi < 0$) şi e = 0 când $\Phi = ct$ ca în figura 3.44. Graficul lui e(t) se obține prin derivarea grafică a funcției $\frac{d\Phi}{dt}$.

3. Să se verifice continuitatea liniilor de curent printr-un condensator.

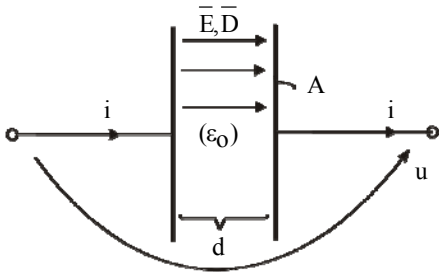


Fig 3.45

Dacă se aplică o tensiune sinusoidală la bornele sale atunci:

$$u = U_m \sin\omega t \rightarrow E = \frac{U_m}{d}\sin\omega t \rightarrow D = \varepsilon_o E$$

Curentul de deplasare prin condensator are densitatea:

$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = (\varepsilon_o \omega \frac{U_m}{d})\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$, iar intensitatea curentului este:

$$i_d = J_d A = \omega U_m \frac{\varepsilon_o A}{d}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \omega C U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Curentul de conducție prin fir este: $i = C\frac{du}{dt} = \omega C U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

deci $i = i_d$, curentul de conducție din fir se continuă prin dielectric sub formă de curent de deplasare.

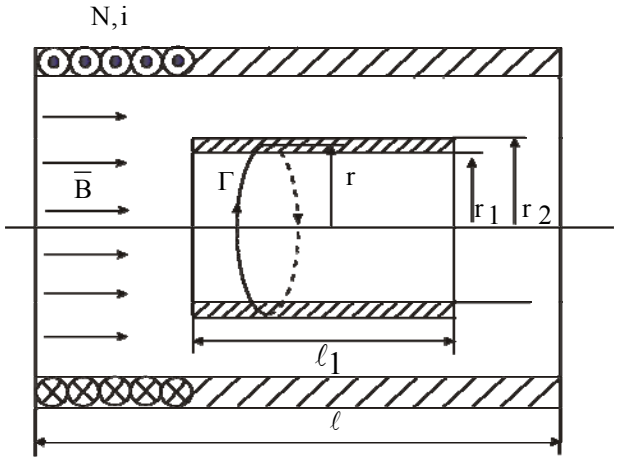


Fig 3.46

4. Într-o bobină cilindrică cu N spire parcurse de curentul i(t) este plasat coaxial un tub conductor. Neglijând câmpul magnetic de reacție, să se determine puterea electrică transformată în căldură în materialul tubului conductor (figura 3.46).

Inducția $\overline{B}$ în interiorul bobinei este un câmp uniform cu expesia:

$$B = \mu_o \frac{Ni}{\ell} \rightarrow \Phi_{S_\Gamma} = \overline{B}\,\overline{S}_\Gamma = -B\pi r^2$$

Tensiunea electromotoare indusă în curba Γ (r ϵ (r_1,r_2)), respectiv câmpul electric indus de-a lungul curbei Γ este:

$$\oint_\Gamma \overline{E}\,\overline{d\ell} = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \rightarrow E\cdot 2\pi r = \pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow E = \mu_o \frac{N}{2\ell} r \frac{\partial i}{\partial t} \rightarrow$$

$$\rightarrow J = \sigma E \rightarrow p_j = \rho J^2 = EJ$$

Puterea transformată în căldură pe materialul tubului conductor este:

$$P_j' = \int_{v_{tub}} p_j\, dv = \int_{r_1}^{r_2} (\sigma E^2) 2\pi\ell_1 r dr = \underbrace{\sigma\mu_o{}^2 \frac{N^2}{\ell^2} \frac{\pi\ell_1}{8}\left(r_2{}^4 - r_1{}^4\right)}_{k} \left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)^2 = k\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)^2$$

$$\begin{cases} P_j = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T P_j'\, dt = \frac{k}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)^2 dt \xrightarrow[i=I_m \sin\omega t]{} P_j = k\,\omega^2\, I_{ef}{}^2 \\ P_j = k\left(\dfrac{\partial i}{\partial t}\right)_{ef}^2 = k\left(\omega I_{ef}\right)^2 = \omega^2\sigma \dfrac{\mu_o{}^2 N^2 \pi\ell_1}{8\ell^2}\left(r_2{}^4 - r_1{}^4\right) I_{ef}{}^2 \end{cases}$$

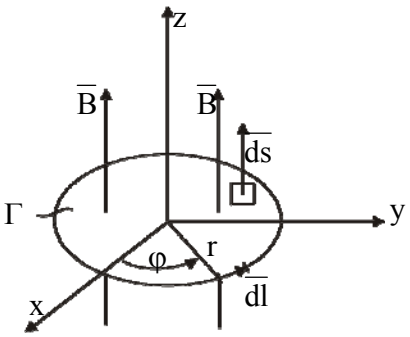


Fig 3.47

5. Prin curba Γ conținută în planul xOy şi descrisă de ecuația $x^2+y^2=16$, trece un câmp magnetic variabil având expresia: $\overline{B}=\overline{k}\,2\sqrt{x^2+y^2}\cos\omega t$

Se cere expresia t.e.m induse în spira Γ din figura 3.47

Tensiunea electromotoare indusă (prin transformare) este:

$$e_\Gamma=-\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma}\overline{B}\,\overline{ds}=-\int_{S_\Gamma}\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}\,\overline{ds}=\int dy\int\left(-2\omega\sqrt{x^2+y^2}\sin\omega t\right)dx$$

$$\begin{cases}\overline{ds}=\overline{k}\,dx\,dy\\ \overline{d\ell}=r\,d\varphi\,\overline{u}_\varphi\end{cases}\qquad\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}\qquad\begin{cases}\frac{\partial B}{\partial t}=-2\,\omega\,r\sin\omega t\\ ds=r\,dr\,d\varphi\end{cases}$$

Cu schimbarea de variabile, expresia tensiunii electromotoare devine:

$$e_\Gamma=2\omega\,\sin\omega t\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4 r^2\,dr=\frac{4\pi}{3}64\,\omega\,\sin\omega t\quad[V]$$

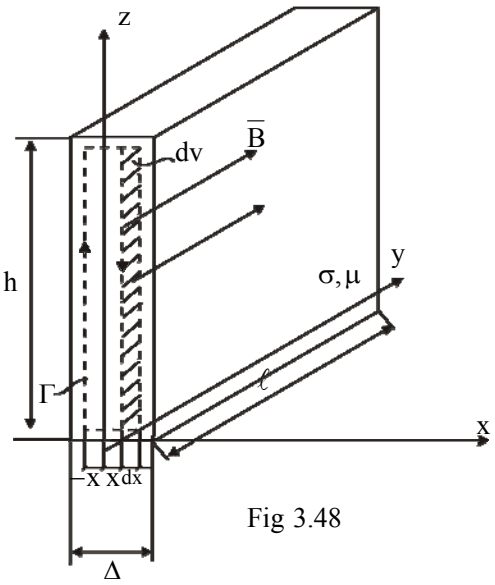


Fig 3.48

6. Printr-o tolă feromagnetică cu parametrii (σ, μ) şi geometria din figură trece un flux magnetic variabil sinusoidal. Cum $\Delta<<(h,\ell)$ pe grosimea tolei (figura 3.48) câmpul $\overline{B}$ îl presupunem repartizat uniform: $B=B_m\sin\omega t$. Să se determine pierderile prin curenți turbionari în volumul tolei.

Câmpul $\overline{B}=\overline{j}B(t)$ induce în jurul său linii de câmp electric indus $\overline{E}$ situate în plane $\perp$ pe $\overline{B}$. Fie Γ o astfel de linie a câmpului electric indus $\overline{E}$:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \overline{E}\,\overline{d\ell} = E \cdot \ell_\Gamma = E\left(2h + 4x\right) \approx 2hE$$

Fluxul magnetic prin suprafața S_Γ este :

$$\Phi_{S_\Gamma} = \overline{B}\;\overline{S}_\Gamma = B\ 2xh \quad \rightarrow \quad -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} = -2xh\frac{\partial B}{\partial t}$$

Din legea inducției electromagnetice (3.49) tensiunea elecromotoare indusă prin transformare este:

$$e_\Gamma = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \quad \rightarrow \quad 2hE = -2xh\frac{\partial B}{\partial t} \quad \rightarrow \quad E = -x\frac{\partial B}{\partial t} = -\omega x B_m \cos\omega t$$

Semnul (–) indică faptul că liniile de câmp indus $\overline{E}$ nu coincid cu orientarea curbei Γ din figura 3.48, ele fac rotoare stângi în jurul câmpului inductor $\overline{B}$. Cutenții induși $\overline{J}$ şi pierderile specifice au expresiile:

$$J_{ef} = \sigma E_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega x B_m \quad \rightarrow \quad p_j = \rho J_{ef}^{\,2} = \frac{\omega^2 B_m^{\,2}}{2\rho}x^2$$

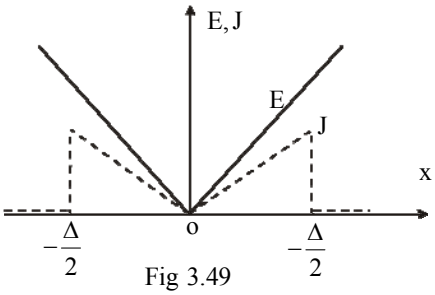


Fig 3.49

Integrând pierderile specifice (p_j) pe volumul tolei ($dv = \ell h dx$) se obține :

$$P_j = \frac{\omega^2 B_m^{\,2}}{2\rho}\ell h\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 dx = \frac{\omega^2 B_m^{\,2}\Delta^2}{3\rho}\underbrace{\left(\ell h\Delta\right)}_{v_{Fe}}$$

Pierderile de putere din unitatea de volum sunt:

$$P_{jsp} = \frac{P_j}{v_{Fe}} = \frac{\omega^2 B_m^{\,2}\Delta^2}{3\rho} = f\left(\omega^2, B_m^{\,2}, \Delta^2, \rho\right)$$

Încălzirea tolei creşte proporțional cu mărimile:

ω^2 – frecvența fluxului; peste o anumită frecvență miezurile nu se mai fac din tole feromagnetice, s-ar încălzi prea mult.

$B_m^{\,2}$ – amplitidinea câmpului, deci cu solicitarea magnetică a miezului (tolei).

Δ^2 – grosimea tolei; tolele subțiri se încălzesc mai puțin

$\frac{1}{\rho}$ – cu cât ρ este mai mare (tole cu adaos de siliciu, care mărește ρ dar le face şi mai casante) se încălzesc mai puțin .

4. Ecuațiile câmpului electromagnetic

4.1 Legile câmpului electromagnetic- un sistem complet de ecuații

Teoria macroscopică a fenomenelor electromagnetice utilizează pentru caracterizarea fenomenelor şi a stărilor corespunzătoare un număr de şase mărimi primitive $\left(q, \bar{p}, i, \bar{m}, \bar{E}, \bar{B}\right)$ şi un număr nelimitat de mărimi derivate.

Determinarea univocă a unui câmp de vectori (problema Poincaré) este posibilă sub *forma integrală* dacă este precizată *circulația* sa în lungul oricărei curbe închise Γ şi *fluxul* său printr-o suprafață închisă Σ iar sub formă locală dacă în orice punct din domeniu este precizat *rotorul* şi *divergența* câmpului. Dacă expresiile legilor electrotehnice satisfac aceste condiții se spune că expresiile lor constituie un *sistem complet de ecuații* pe baza căruia se poate determina un câmp.

La baza fenomenelor electromagnetice stau un număr de 12 legi, dintre care 9 sunt *legi generale* şi 3 sunt *legi de material*.

Legile generale(considerând medii fixe $\bar{v} = 0$, fără mărimi neelectrice $\bar{P}_p = 0, \bar{M}_p = 0, \bar{E}_i = 0$) scrise sub forma lor integrală şi locală sunt:

I. Legea inducției electromagnetice :

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot \bar{dl} = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \quad ; \quad \text{rot}\, \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

II . Legea circuitului magnetic:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot \bar{dl} = \theta_{S_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}; \quad \text{rot}\, \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

III. Legea fluxului electric:

$$\int_{\Sigma} \bar{D} \cdot \bar{ds} = q_{\Sigma} \quad ; \quad \text{div}\, \bar{D} = \rho_v \text{ (sau 0 în afara corpurilor încărcate)}$$

IV. Legea fluxului magnetic:

$$\int_{\Sigma} \bar{B} \cdot \bar{ds} = 0 \quad ; \quad \text{div}\, \bar{B} = 0$$

V. Legea conservării sarcinii electrice:

$$i_{\Sigma} = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt} \quad ; \quad \text{div}\, \bar{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

VI. Legea legăturii în câmp electric:

$$\overline{D} = \varepsilon_o \cdot \overline{E} + \overline{P}$$

VII. Legea legăturii în câmp magnetic:

$$\overline{B} = \mu_o \cdot \left(\overline{H} + \overline{M}\right)$$

VIII. Legea transformării energiei în conductori:

$$p_j = \overline{E} \cdot \overline{J}$$

IX. Legea electrolizei:

$$m = \frac{A}{n \cdot F_o} \cdot q = k \cdot q$$

In expresiile acestor legi intervin trei constante universale $\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi 910^9}\ {}^{F}\!/_{m}$, $\mu_o = 4\pi 10^{-7}\ {}^{H}\!/_{m}$ şi $F_o = 96 \cdot 496\ {}^{C}\!/_{ech.gr}$ - constanta lui Farraday.

Principalele *legi de material* (mai sunt şi alte legi de material: legea câmpurilor voltaice, legea emisiei electronilor din metale etc) sunt:

X. Legea polarizației electrice temporare:

$$\overline{P}_t = \varepsilon_o \chi_e \overline{E}$$

care combinată cu legea III fără $\overline{P}_p = 0 \rightarrow \overline{D} = \varepsilon \overline{E}$

XI. Legea magnetizației temporare:

$$\overline{M}_t = \chi_m \overline{H}$$

care combinată cu legea VII pentru $\overline{M}_p = 0 \rightarrow \overline{B} = \mu \overline{H}$

XII. Legea conducției electrice:

$$\overline{J} = \sigma \overline{E}$$

In expresiile acestor legi apar constante ce țin de proprietățile mediului în care se aplică legea: $\varepsilon(\chi_e, \varepsilon_r); \mu(\chi_m, \mu_r); \sigma = \frac{1}{\rho}$.

Examinând expresiile acestor legi se constată următoarele proprietăți:

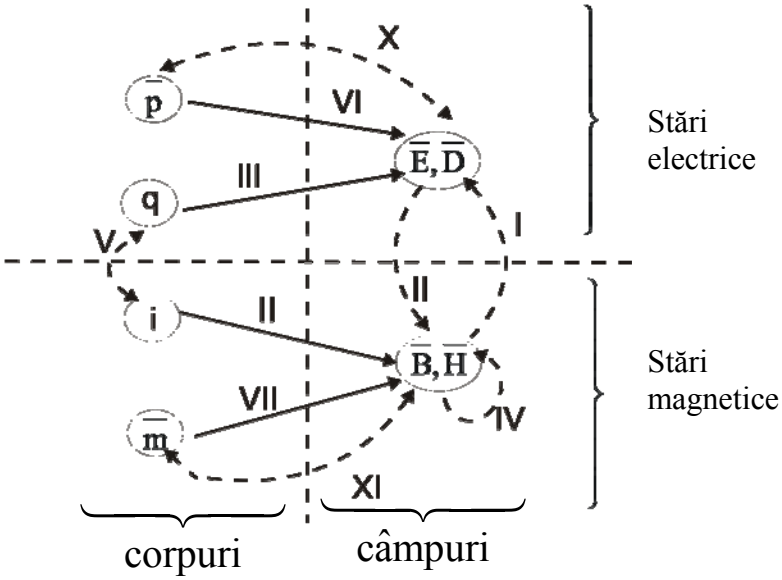


Fig 4.1

- Legile I,III,VI stabilesc con-dițiile produ-cerii unui câmp electric $\left(\overline{E}, \overline{D}\right)$ de către câmpuri variabile $\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$, de către corpuri încăr-cate (q) şi de către corpuri polarizate $\left(\overline{p}\right)$.
- Legile II, VII stabilesc condițiile producerii unui câmp magnetic $\left(\overline{H}, \overline{B}\right)$ de către câmpuri electrice variabile $\left(\frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\right)$, de către curenți electrici (i) şi de către corpuri magnetizate $\left(\overline{m}\right)$.
- Legile VIII, IX stabilesc efectul energetic, respectiv chimic al procesului de conducție a curentului electric.
- In regim staționar $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ fenomenele electrice (stările electrice) şi cele magnetice nu se influențează reciproc. Câmpurile $\overline{E}$ şi $\overline{B}$ pot coexista în aceeaşi regiune a spațiului (de exemplu în jurul conductoarelor parcurse de curent continuu) fără a interacționa între ele; proprietatea rămâne adevărată şi în regim cvasistaționar (frecvențe joase).
- In regim variabil repartiția de sarcină este condiționată de repartiția de curent (legea V). Câmpul magnetic variabil *induce* câmp

electric (legea I) iar un câmp electric variabil *produce* în jurul său un câmp magnetic (legea II).Legăturile între câmpul electric şi cel magnetic există doar în regimuri variabile (sunt desenate cu linie punctată în figura 4.1).

In regim variabil câmpul electromagnetic poate exista şi în lipsa corpurilor sub formă de *undă electromagnetică*, undă care se propagă în spațiu cu viteza $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Legile permit o corelare care arată că ansamblul lor formează, din punct de vedere matematic, un *sistem complet de ecuații*:

- legile I şi III precizează sub formă integrală circulația şi fluxul câmpului electric, respectiv sub formă locală precizează rotorul şi divergența câmpului electric

- legile II şi IV precizează integral circulația şi fluxul câmpului magnetic iar local rotorul şi divergența câmpului magnetic.

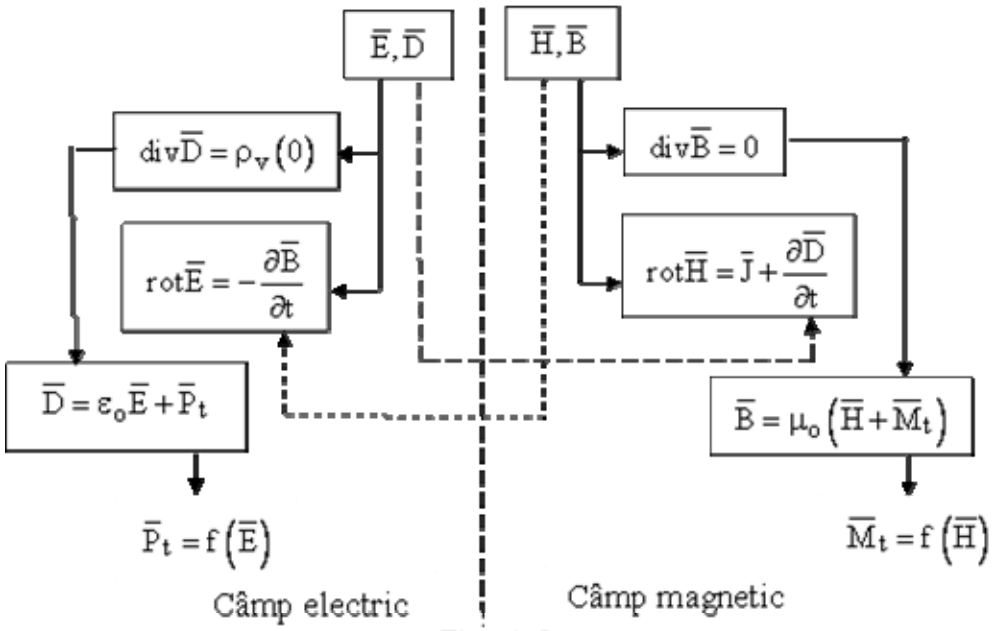


Fig. 4.2

Deoarece legile sub formă locală nu precizează rotorul şi divergența aceleiaşi mărimi, ci $\mathrm{rot}\,\bar{E}$ şi $\mathrm{div}\,\bar{D}$, ținând seama de expresiile celorlalte legi din sistem se pot aduce la aceeaşi specie. Similar în câmp magnetic, deşi se cunosc $\mathrm{div}\,\bar{B}$ şi $\mathrm{rot}\,\bar{H}$ se pot aduce la rot şi div din aceeaşi specie ca

în figura 4.2. Legătura între câmpul electric şi cel magnetic există doar în regim variabil (legăturile sunt desenate cu linie punctată).

Formele locale ale legilor sistematizează matematic proprietăţile câmpului şi permit stabilirea unor algoritmi de calcul iar formele integrale asociate sunt singurele adevăruri verificabile experimental.

4.2 Teorema de unicitate a câmpului electromagnetic

Sistemul de legi ale câmpului electromagnetic permit să determinăm univoc mărimile de stare ale câmpului electromagnetic:

$$\overline{E}(\bar{r},t)\ ;\ \overline{D}(\bar{r},t)\ ;\ \overline{H}(\bar{r},t)\ ;\ \overline{B}(\bar{r},t)$$

în fiecare punct din domeniul de câmp v_Σ mărginit de suprafaţa închisă Σ şi în fiecare moment "t" ulterior momentului iniţial $t \geq t_o$,dacă se cunosc:

1.*condiţiile iniţiale*: starea câmpului electromagnetic în fiecare punct din v_Σ la momentul iniţial t_o: $\overline{E}(\bar{r},t_o);\ \overline{H}(\bar{r},t_o)$.

2.*condiţiile la limită*: distribuţia (şi evoluţia în timp) pe frontiera Σ în fiecare moment $t \geq t_o$ a componentelor tangenţiale: $\overline{E}_t(\bar{r},t);\ \overline{H}_t(\bar{r},t)$.

3.*proprietăţile mediului* şi starea corpurilor din domeniul de câmp v_Σ : $\varepsilon = \varepsilon(\bar{r});\ \mu = \mu(\bar{r});\ \sigma = \sigma(\bar{r})$;

4.*condiţiile de surse*: cunoaşterea funcţiilor $\rho_v, \overline{J}, \overline{P}_p, \overline{\mathbf{M}}_\mathbf{p}, \overline{\mathbf{E}}_\mathbf{i}(\bar{r},t)$, care produc câmp în jurul lor.

Sistematic, aceste condiţii se scriu sub forma (4.1):

$$\left[\begin{matrix}\overline{E}_t(P_i,t')\\ \overline{H}_t(P_i,t')\end{matrix}\right]_{\substack{P\in\Sigma\\ t'>t_o}} + \left[\begin{matrix}\overline{E}(P,t_o)\\ \overline{H}(P,t_o)\end{matrix}\right]_{P\in v_\Sigma} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\overline{E}(P,t)\\ \overline{H}(P,t)\end{matrix}\right] \qquad (4.1)$$

respectiv pentru a determina câmpurile $\overline{E}$ şi $\overline{H}$ într-un punct din v_Σ la un moment t trebuie cunoscute valorile lor iniţiale în orice punct din v_Σ şi evoluţia componentelor tangenţiale $\overline{E}_t, \overline{H}_t$, pe frontiera Σ a domeniului, de la originea t_o până la momentul considerat t, la proprietăţi ale mediului date.

Demonstrarea teoremei se poate face plecând de la expresiile legilor şi reflectă matematic proprietatea câmpului electromagnetic de a satisface, ca orice sistem fizic, principiul cauzalităţii.

Deoarece condiţiile impuse de această teoremă sunt severe (în special condiţia (2)), în cele mai multe cazuri nu se determină direct

câmpul $\overline{E}$ şi $\overline{H}$ ci se studiază probleme asociate, mult mai simple ; se determină potenţialele lor V şi $\overline{A}$ care satisfac condiţii de unicitate mai uşor de stabilit şi în final se revine la câmpurile fizice: $\overline{E} = -\text{grad}\, V$ şi $\overline{B} = \text{rot}\, \overline{A}$, aşa cum se va vedea în capitolele ce urmează.

4.3 Teorema superpoziţiei câmpurilor electromagnetice

Un domeniu de câmp v_Σ limitat de suprafaţa Σ conţine în interior medii liniare şi izotrope aflate în repaus şi în acest domeniu sunt suprapuse "n" câmpuri electromagnetice corespunzând fiecare dintre ele la condiţii iniţiale şi la limită proprii.

Dacă $\overline{E}_k, \overline{D}_k, \overline{H}_k, \overline{B}_k$ sunt mărimile de stare ale câmpului ce corespund la:

- Condiţii iniţiale: $\overline{E}_k(\bar{r}, t_o); \overline{H}_k(\bar{r}, t_o)$ în orice punct din v_Σ
- Condiţii la limită: $\overline{E}_{tk}(\bar{r}, t); \overline{H}_{tk}(\bar{r}, t)$ pe suprafaţa Σ, la $t > t_o$
- Mărimi neelectrice: $\overline{P}_{pk}(\bar{r}, t);\ \overline{H}_{pk}(\bar{r}, t);\ \overline{E}_{ik}(\bar{r}, t)$

atunci câmpurile rezultante ce provin din însumarea (vectorială) a mărimilor de stare ale câmpurilor componente (k=1,2…n) sunt:

$$\overline{E} = \sum_1^n \overline{E}_k\ ;\quad \overline{H} = \sum_1^n \overline{H}_k\ ;\quad \overline{D} = \sum_1^n \overline{D}_k\ ;\quad \overline{B} = \sum_1^n \overline{B}_k \qquad (4.2)$$

având în vedere liniaritatea ecuaţiilor câmpului. Acestor câmpuri rezultante le corespund condiţii iniţiale şi la limită rezultante:

- Condiţii iniţiale: $\overline{E}(\bar{r}, t_o) = \sum_1^n \overline{E}_k(\bar{r}, t_o);\quad \overline{H}(\bar{r}, t_o) = \sum_1^n \overline{H}_k(\bar{r}, t_o)$ (4.3)

- Condiţii la limită: $\overline{E}_t(\bar{r}, t) = \sum_1^n \overline{E}_{tk}(\bar{r}, t);\quad \overline{H}_t(\bar{r}, t) = \sum_1^n \overline{H}_{tk}(\bar{r}, t)$ (4.4)

Teorema superpoziţiei şi în domeniul câmpului, ca în alte domenii ale ştiinţei, pune în evidenţă faptul că la suma cauzelor le corespunde suma efectelor.

Dacă cel puţin o regiune din v_Σ nu are proprietăţi liniare, teorema nu se mai poate aplica.

4.4 Ecuațiile lui Maxwell

Studiul general şi sistematic al câmpului electromagnetic se poate face cu ajutorul formelor locale ale legilor. Ecuațiile cu derivate parțiale ce rezultă din formele locale ale legilor pentru medii imobile $\left(\bar{v}=0\right)$ şi în domenii de continuitate a proprietăților fizice se numesc *ecuațiile lui Maxwell*.

Pe baza acestor ecuații se pot studia câmpurile electromagnetice pure, fără fenomene mecanice ($\bar{v}=0$ - medii fixe), fără polarizație permanentă $\left(\bar{P}_p=0\right)$, fără magnetizație permanentă $\left(\bar{M}_p=0\right)$ şi fără câmpuri electric imprimate $\left(E_i=0\right)$. Ce mai rămâne din formele locale ale legilor sunt expresiile (4.5):

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\bar{H}=\bar{J}+\dfrac{\partial\bar{D}}{\partial t} & \text{- legea circuitului magnetic} \\ \operatorname{rot}\bar{E}=-\dfrac{\partial\bar{B}}{\partial t} & \text{- legea inductiei electromagnetice} \\ \operatorname{div}\bar{D}=\rho_v/0 & \text{- legea fluxului electric} \\ \operatorname{div}\bar{B}=0 & \text{- legea fluxului magnetic} \\ \bar{D}=\varepsilon\bar{E};\ \bar{B}=\mu\bar{H};\ \bar{J}=\sigma\bar{E} & \text{- legile legaturii si a conductiei electrice} \end{cases} \tag{4.5}$$

Vom considera că prezintă interes tehnic doar câmpul din exteriorul corpurilor încărcate cu sarcină $\left(\rho_v=0\right)$.

Ecuațiile câmpului se pot scrie în două variante, cunoscute sub numele de *ecuațiile lui Maxwell în* $\bar{E}$ *şi* $\bar{H}$ şi *ecuațiile lui Maxwell în* $\bar{E}$ *şi* $\bar{B}$:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\bar{H}=\sigma\bar{E}+\varepsilon\dfrac{\partial\bar{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\bar{E}=-\mu\dfrac{\partial\bar{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\bar{E}=0 \\ \operatorname{div}\bar{H}=0 \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} \text{rot}\,\overline{B} = \sigma\mu\overline{E} + \varepsilon\mu\dfrac{\partial\overline{E}}{\partial t} \\ \text{rot}\,\overline{E} = -\dfrac{\partial\overline{B}}{\partial t} \\ \text{div}\,\overline{E} = 0 \\ \text{div}\,\overline{B} = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Sub formele (4.6) şi (4.7) ecuaţiile lui Maxwell reprezintă, din punct de vedere matematic, un sistem de opt ecuaţii scalare simultane cu derivate parţiale, având şase funcţii necunoscute: $H_x, H_y, H_z, E_x, E_y, E_z$ care sunt componentele vectorilor $\overline{H}(\bar{r}, t)$ şi $\overline{E}(\bar{r}, t)$ atunci când domeniul de câmp are o astfel de configuraţie încât să folosim raportarea la un sistem cartezian de axe x,y,z.

Să stabilim ecuaţiile cu derivate parţiale pe care le satisfac separat câmpurile $\overline{E}$ şi respectiv $\overline{H}$.

Aplicăm rotorul primei ecuaţii a lui Maxwell din (4.6):

$$\begin{cases} \text{rot}\left(\text{rot}\,\overline{H}\right) = \sigma\left(\text{rot}\,\overline{E}\right) + \varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\text{rot}\,\overline{E}\right) = -\sigma\mu\dfrac{\partial\overline{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\overline{H}}{\partial t^2} \\ \text{rot}\left(\text{rot}\,\overline{H}\right) = \text{grad}\left(\underbrace{\text{div}\,\overline{H}}_{0}\right) - \Delta\overline{H} = -\Delta\overline{H} \end{cases} \tag{4.8}$$

Deci ecuaţia satisfăcută de câmpul $\overline{H}$ este de forma:

$$\Delta\overline{H} - \sigma\mu\frac{\partial\overline{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.9}$$

Similar, aplicând rotorul celei de a doua ecuaţii a lui Maxwell (4.6) şi ţinând seama de celelalte ecuaţii, obţinem o ecuaţie de tipul (4.9) şi pentru $\overline{E}$.

Reunite, în scriere matricială, cele două ecuaţii de acelaşi tip, avem:

$$\Delta\begin{bmatrix}\overline{E}\\ \overline{H}\end{bmatrix} - \sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\overline{E}\\ \overline{H}\end{bmatrix} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{bmatrix}\overline{E}\\ \overline{H}\end{bmatrix} = 0 \leftrightarrow \left(\Delta - \sigma\mu\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{bmatrix}\overline{E}\\ \overline{H}\end{bmatrix} = 0 \tag{4.10}$$

Ecuaţiile de tipul (4.10) sunt ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi, de tip hiperbolic şi au, în general, ca soluţie o undă atenuată. Soluţiile

lor ($\overline{E}$ şi $\overline{H}$) nu sunt independente (deşi sunt ecuații distincte), ele sunt legate prin primele două ecuații din (4.6), deci unda electrică şi cea magnetică se intercondiționează reciproc în unda electromagnetică.

- In cazul *mediilor dielectrice* (izolante) $\sigma = 0$ şi din (4.10) rămâne:

$$\left(\Delta - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[\begin{matrix}\overline{E}\\ \overline{H}\end{matrix}\right] = 0 \leftrightarrow \left(\Delta - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[\begin{matrix}\overline{E}\\ \overline{H}\end{matrix}\right] = 0 \leftrightarrow \Box\left[\begin{matrix}\overline{E}\\ \overline{H}\end{matrix}\right] = 0 \tag{4.11}$$

unde : $\Box = \Delta - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ este *operatorul d'Alembertian*

$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ este *viteza de propagare a undei* prin mediul cu ε şi μ.

Unda electromagnetică printr-un mediu dielectric (în particular şi prin vid, aer uscat) este soluția unei ecuații de tip d'Alembert (4.11) numită şi *ecuația undei*, scrisă într-un *mediu dielectric* prin care unda se *propagă.*

- In *medii conductoare* $(\sigma >> \varepsilon)$ ecuația (4.10) devine:

$$\left(\Delta - \sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\begin{matrix}\overline{E}\\ \overline{H}\end{matrix}\right] = 0 \tag{4.12}$$

care este o ecuație vectorială de tip parabolic (ecuație de tip Helmholz) sau *ecuația difuziei* iar $\lambda = \frac{1}{\sigma\mu}$ este *constanta de difuzie* a mediului. Deci într-o piesă conductoare unda electromagnetică *pătrunde* amortizat, are loc un fenomen de difuzie (analog cum pătrunde căldura într-un corp).

In *regim permanent sinusoidal*, ecuațiile lui Maxwell (4.6) se transpun în mărimi complexe sub forma:

$$\begin{cases} \text{rot}\,\dot{\overline{H}} = \sigma\dot{\overline{E}} + j\omega\varepsilon\dot{\overline{E}} \\ \text{rot}\,\dot{\overline{E}} = -j\omega\mu\dot{\overline{H}} \\ \text{div}\,\dot{\overline{H}} = 0 \\ \text{div}\,\dot{\overline{E}} = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

unde $\dot{\overline{H}}$ este reprezentarea în complex a câmpului vectorial $\overline{H}(t)$ care are o variație sinusoidală în timp. In loc de a sublinia mărimea complexă $\overline{H}$

(cum era în teoria circuitelor U, I, Z…) se pune un punct deasupra barei care reprezintă caracterul vectorial al funcției: $\dot{\overline{H}}$, $\dot{\overline{E}}$, $\dot{\overline{J}}$.

In *regim tranzitoriu* (cu condițiile inițiale date) ecuațiile lui Maxwell se scriu operațional (cu transformata Laplace) sub forma:

$$\begin{cases} \text{rot}\,\overline{H}(s) = \sigma\overline{E}(s) + s\varepsilon\overline{E}(s) - \varepsilon\overline{E}_o \\ \text{rot}\,\overline{E}(s) = s\mu\overline{H}(s) - \mu\overline{H}_o \\ \text{div}\,\overline{H}(s) = 0 \\ \text{div}\,\overline{E}(s) = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

unde $\overline{H}(s)$ este imaginea Laplace a funcției vectoriale $\overline{H}(t)$ iar $\overline{H}_o$ este valoarea inițială (din momentul comutației) a aceleeaşi funcții. Ecuațiilor lui Maxwell (4.6) şi (4.7) valabile în domenii de continuitate li se asociază *ecuațiile de trecere* (4.15) valabile în vecinătatea unor suprafețe de discontinuitate fixe S_{12} ce separă două medii corporale cu proprietăți diferite:

$$\begin{cases} \text{rot}_s\overline{E} = 0 \;\rightarrow\; \overline{n}_{12}\left(\overline{E}_2 - \overline{E}_1\right) = 0 \;\rightarrow\; E_{t_2} = E_{t_1} \\ \text{rot}_s\overline{H} = \overline{J}_s \;\rightarrow\; \overline{n}_{12}\left(\overline{H}_2 - \overline{H}_1\right) = \overline{J}_s \;\rightarrow\; \overline{H}_{t_2} - \overline{H}_{t_1} = \overline{J}_s \xrightarrow{\overline{J}_s = 0} H_{t_2} = H_{t_1} \\ \text{div}_s\overline{J} = -\dfrac{\partial\rho_s}{\partial t} \;\rightarrow\; \overline{n}_{12}\left(\overline{J}_2 - \overline{J}_1\right) = -\dfrac{\partial\rho_s}{\partial t} \;\rightarrow\; J_{n_2} - J_{n_1} = -\dfrac{\partial\rho_s}{\partial t} \xrightarrow{\rho_s = 0;\ \frac{\partial}{\partial t} = 0} J_{n_1} = J_{n_2} \\ \text{div}_s\overline{D} = \rho_s \;\rightarrow\; \overline{n}_{12}\left(\overline{D}_2 - \overline{D}_1\right) = \rho_s \;\rightarrow\; D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s \xrightarrow{\rho_s = 0} D_{n_2} = D_{n_1} \\ \text{div}_s\overline{B} = 0 \;\rightarrow\; \overline{n}_{12}\left(\overline{B}_2 - \overline{B}_1\right) = 0 \;\rightarrow\; B_{n_2} = B_{n_1} \end{cases} \tag{4.15}$$

unde $\overline{n}_{12}$ este versorul normalei la suprafața S_{12}, dirijat dinspre mediul 1 spre 2. Pentru discontinuități mobile cu $\overline{v}_S$ ecuațiile de trecere (4.15) au o formă mai dezvoltată[10].

4.5 Unda electromagnetică plană

Din analiza primelor două ecuații ale lui Maxwell rezultă că, în cazul câmpurilor variabile în timp, apare o dublă legătură cauzală între aspectul electric şi cel magnetic al câmpului electromagnetic desprins de corpuri, sub formă de *undă electromagnetică*.

Vom examina un caz particular de undă într-un mediu dielectric $(\sigma = 0)$ când în toate punctele situate într-un plan perpendicular pe *direcția*

de propagare valoarea câmpului este constantă. Dacă Ox este direcția de propagare a undei, atunci avem un *câmp plan* sau *undă plană* dacă mărimile de stare ale câmpului depind doar de x şi t:

$$\overline{E} = \overline{E}(x,t) \quad ; \quad \overline{H} = \overline{H}(x,t)$$

O astfel de undă plană există practic la distanță suficient de mare față de sursă (antena de emisie) într-un mediu izotrop şi omogen.

Considerăm un mediu dielectric $(\sigma = 0)$ cu permitivitatea ε, permeabilitatea μ, neîncărcat cu sarcină $(\rho_v = 0)$ şi neparcurs de curenți $(\bar{J} = 0)$ şi vom pune îm evidență doar câmpul electromagnetic ce apare prin interacțiunea dintre câmpul electric şi cel magnetic variabile în timp. Căutăm numai soluțiile variabile în timp ale ecuațiilor lui Maxwell (o constantă, deci, nu face parte dintr-o undă).

In aceste condiții $\left(\frac{\partial}{\partial y} = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0, \rho_v = 0, \sigma = \mathbf{0}\right)$ ecuațiile lui Maxwell se scriu sub forma particulară:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\overline{H} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -\bar{j}\frac{\partial H_z}{\partial x} + \bar{k}\frac{\partial H_y}{\partial x} \\ \operatorname{rot}\overline{H} = \varepsilon\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = \bar{i}\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} + \bar{j}\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} + \bar{k}\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad ; \varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \tag{4.16}$$

$$\operatorname{div}\overline{H} = 0 \rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \tag{4.17}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\overline{E} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\bar{j}\frac{\partial E_z}{\partial x} + \bar{k}\frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \operatorname{rot}\overline{E} = -\mu\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = -\mu\left(\bar{i}\frac{\partial H_x}{\partial t} + \bar{j}\frac{\partial H_y}{\partial t} + \bar{k}\frac{\partial H_z}{\partial t}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \quad ; -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \; ; \; -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \tag{4.18}$$

$$\operatorname{div} \bar{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \tag{4.19}$$

Din relațiile (4.16) şi (4.19) respectiv (4.17) şi (4.18) rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \; ; \; \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \; \rightarrow \; E_x = ct = 0 \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \; ; \; \dfrac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \; \rightarrow \; H_x = ct = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

respectiv unda plană este o *undă transversală* care nu are componente pe direcția de propagare $(E_x = 0, H_x = 0)$, deci vectorii $\bar{E}$ şi $\bar{H}$ sunt conținuți în plane perpendiculare pe direcția de propagare. Din (4.20) rezultă că E_x şi H_x nu variază în timp şi nici în spațiu (sunt nişte constante), deci nu pot fi parte componentă a unei unde (câmp variabil) şi le considerăm nule; aceste componente E_x şi H_x pot fi cel mult nişte câmpuri statice, care nu afectează propagarea undei.

Din relațiile (4.16) şi (4.18) rezultă:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial E_y}{\partial t} = -\dfrac{\partial H_z}{\partial x} \\ \mu \dfrac{\partial H_z}{\partial t} = -\dfrac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \tag{4.21}$$

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial t} = \dfrac{\partial H_y}{\partial x} \\ \mu \dfrac{\partial H_y}{\partial t} = \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \end{cases} \tag{4.22}$$

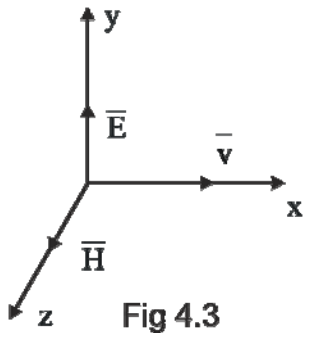


Fig 4.3

Relațiile (4.21) reprezintă o undă plană având componentele (E_y, H_z) iar (4.22) o undă plană având componentele (E_z, H_y). Cele două unde sunt independente între ele, deci de-a lungul axei Ox se pot propaga două unde plane care nu se influențează reciproc. Fiecare este o undă transversală de direcție fixă (Ox) deci sunt unde polarizate liniar după două direcții ortogonale. Una dintre ele (E_y, H_z) reprezentată în figura

4.3 se propagă după direcțiaOx cu viteza $\bar{v}$:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \bar{j}\,E_y = \bar{j}\,E_y(x,t)\\ \bar{H} &= \bar{k}\,H_z = \bar{k}\,H_z(x,t)\end{aligned} \tag{4.23}$$

Cele două funcții $E_y(x,t)$ şi $H_z(y,t)$ sunt legate între ele prin ecuațiile (4.21) care reprezintă un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul I. Eliminând pe rând câte una dintre funcții, prin derivări în raport cu x şi cu t, obținem:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \tag{4.24}$$

Ecuațiile (4.24) sunt de tipul (4.11) (în care $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 0$) deci reprezintă ecuația undelor, ecuații cu derivate parțiale de ordinul II de tip hiperbolic a căror soluție este de forma:

$$H_z(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) \;\; ; \;\; E_y(x,t) = f_2\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{4.25}$$

Ele sunt funcții numai de x şi t prin intermediul unei combinații liniare şi omogene $t' = t - \frac{x}{v}$. Notăm $f_1' = \frac{df_1}{dt}$; $f_1'' = \frac{d^2 f_1}{dt^2}$.

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{1}{v}f_1' \;\; \rightarrow \;\; \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}f_1''$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial t} = f_1' \;\; ; \;\; \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = f_1''$$

Deci:
$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = f_1''\left(\frac{1}{v^2} - \varepsilon\mu\right) \tag{4.26}$$

Pentru ca soluția (4.25) să verifice ecuația (4.24) trebuie ca $v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$, respectiv: $v = \pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (4.27)

Scăzând şi adunând Δt la argumentul $\left(t - \frac{x}{v}\right)$, obținem:

$$f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) = f_1\left[(t - \Delta t) - \frac{x - v\Delta t}{v}\right] \tag{4.28}$$

respectiv funcția f_1, soluție a ecuației undelor (4.24), depinde de timp şi de x astfel că valoarea pe care o are f_1 în punctul x, la momentul t este egală cu valoarea pe care a avut-o funcția într-un moment anterior $(t-\Delta t)$, într-un punct situat mai la stânga cu $(v\Delta t)$. Deci soluția f_1 este o funcție ce se propagă în spațiu de-a lungul axei Ox cu viteza $\bar{v}$.

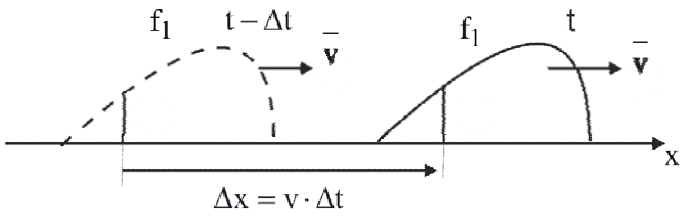


Fig 4.4

Forma (repartiția spațială) a undei f_1 se deplasează în lungul axei x cu viteza v numită *viteza de fază* a undei. Relația (4.27) arată că viteza de fază are două valori egale şi de semn contrar. Prima corespunde undei care se propagă în sensul pozitiv al axei x (*unda directă*) şi are expresia:

$$f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)=f_1\left(t-\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot x\right) \tag{4.29}$$

iar a doua valoare a lui v corespunde undei care se propagă în sensul negativ al axei x (*unda inversă*) şi are expresia :

$$f_1\left(t+\frac{x}{v}\right)=f_1\left(t+\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot x\right) \tag{4.30}$$

Fiecare dintre aceste unde există numai dacă au existat undeva la stânga (sau la dreapta pentru unda inversă) condiții fizice pentru producerea lor (antenă de emisie pentru unda directă, suprafață reflectantă pentru unda inversă etc.).

Unda directă se propagă cu viteza:

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_o\mu_r\mu_o}}=\frac{v_o}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \tag{4.31}$$

iar $v_o=c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}=3\cdot10^8\ {}^{m}\!/_{s}$ este viteza undei în vid.

Unda directă pentru componenta magnetică a undei este:

$$H_z(x,t)=f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)=f_1\left(t-x\sqrt{\varepsilon\mu}\right) \tag{4.32}$$

Dacă într-un punct din spațiu H_z are de exemplu o variație sinusoidală, atunci funcția f_1 este de forma:

$$H_z = H_{z\max}\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)-\varphi\right] \tag{4.33}$$

Cunoscând H_z se poate calcula componenta electrică a undei (E_y):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial t}\\ \dfrac{\partial E_y}{\partial t} = -\dfrac{1}{\varepsilon}\cdot\dfrac{\partial H_z}{\partial x} = -\dfrac{1}{\varepsilon}\left(-\dfrac{1}{v}f_1'\right) = \dfrac{1}{\varepsilon v}f_1'\end{cases} \tag{4.34}$$

Integrând ultima expresie se obține:

$$E_y = \frac{1}{\varepsilon v}\int f_1'\cdot dt = \frac{1}{\varepsilon v}f_1 + \text{const} \tag{4.35}$$

Constanta de integrare se poate omite, interesează doar soluțiile variabile în timp (undele). Mărimea:

$$Z = \mu v = \frac{1}{\varepsilon v} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_o\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = \frac{E_y}{H_z}\quad\left[\frac{V/m}{A/m} = \Omega\right] \tag{4.36}$$

este o caracteristică a mediului prin care se propagă unda electromagnetică şi se numeşte *impedanța de undă* a mediului. Valoarea sa în vid este:

$$Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} = 120\pi = 377\,\Omega \tag{4.37}$$

numită *impedanța de undă a vidului*, o constantă universală.

$$E_y = Z H_z = Z f_1\left(t-\frac{x}{v}\right) \rightarrow f_2\left(t-\frac{x}{v}\right) = Z f_1\left(t-\frac{x}{v}\right) \tag{4.38}$$

Conform cu (4.38) în fiecare punct din spațiu unda electrică (E_y) şi cea magnetică (H_z) *sunt în fază*. (figura 4.5), au forme de variație identice dar sunt situate în plane perpendiculare:

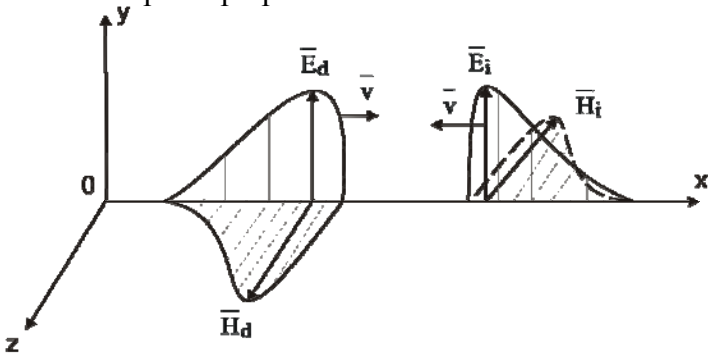


Fig 4.5

La fel ca unda (E_y, H_z) se propagă şi unda (E_z, H_y). Deci există cel mult patru unde electromagentice elementare care compun o undă plană de direcţie de propagare Ox dată, care diferă între ele fie prin *sensul de propagare* (unda directă şi unda inversă), fie prin *direcţia de polarizare* liniară (E_y, H_z) sau (E_z, H_y). In fiecare dintre ele vectorii $\overline{E}$ şi $\overline{H}$ sunt perpendiculari între ei şi perpendiculari pe direcţia de propagare.

Variaţia în timp a mărimilor $\overline{E}$ şi $\overline{H}$, deci forma funcţiilor f_1 şi f_2, sunt arbitrare, ele depind de condiţiile de producere a undei şi de forma mesajului transmis.

4.6 Radiaţia undelor electromagnetice

La frecvenţe înalte câmpul electromagnetic din jurul circuitelor electrice (circuite radiante) apare sub formă de unde electromagnetice, câmpul magnetic $\overline{H}(t)$ *induce* un câmp electric $\left(\operatorname{rot}\overline{E} = -\mu\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}\right)$ iar cel electric $\overline{E}(t)$ va *produce* un câmp magnetic $\left(\operatorname{rot}\overline{H} = \varepsilon\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}\right)$, deci se autogenerează reciproc. Acest câmp se poate desprinde de circuitele care le-au produs şi se propagă sub formă de undă electromagnetică la distanţe mari şi transmit o parte din energia circuitelor; fenomenul este numit *radiaţia circuitelor*.

4.6.1 Potenţiale electrodinamice întârziate (retardate)

Aceste potenţiale generalizează noţiunile de potenţial magnetic vector $\overline{A}$ şi potenţial electric scalar V care se utilizează în cazul câmpurilot staţionare şi cvasistaţionare.

Astfel, din legea fluxului magnetic rezultă: $\operatorname{div}\overline{B} = 0 \rightarrow \overline{B} = \operatorname{rot}\overline{A}_e$, iar din legea inducţiei electromagnetice: $\operatorname{rot}\overline{E} = -\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} \rightarrow \operatorname{rot}\overline{E} = -\operatorname{rot}\frac{\partial\overline{A}_e}{\partial t}$

$\rightarrow$

$$\rightarrow \operatorname{rot}\left(\overline{E} + \frac{\partial\overline{A}_e}{\partial t}\right) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \overline{E} + \frac{\partial\overline{A}_e}{\partial t} = -\operatorname{grad} V_e$$

Deci în regim variabil câmpul electric $\overline{E}$ se scrie sub forma:

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}_e}{\partial t} - \text{grad}\, V_e \tag{4.39}$$

el are o componentă *solenoidală* $\left(-\frac{\partial \bar{A}_e}{\partial t}\right)$ şi una *potențială* ($-\nabla V_e$).

Pentru a determina ecuațiile pe care le satisfac potențialul electrodinamic vector $\bar{A}_e$ şi potențialul electrodinamic scalar V_e vom pleca de la ecuațiile lui Maxwell:

$$\text{rot}\,\bar{B} = \mu\bar{J} + \varepsilon\mu\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \Rightarrow \text{grad}\left(\text{div}\,\bar{A}_e\right) - \Delta\bar{A}_e = \mu\bar{J} + \varepsilon\mu\left(\frac{-\partial^2 \bar{A}_e}{\partial t^2} - \text{grad}\frac{\partial V_e}{\partial t}\right) \tag{4.40}$$

Ecuația pe care o satisfac cele două potențiale este de forma:

$$\Delta\bar{A}_e - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \bar{A}_e}{\partial t^2} = -\mu\bar{J} + \text{grad}\left(\text{div}\,\bar{A}_e + \varepsilon\mu\frac{\partial V_e}{\partial t}\right) \tag{4.41}$$

Similar putem stabili o altă ecuație pentru cele două funcții $\bar{A}_e$ şi V_e:

$$\text{div}\,\bar{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \xrightarrow[(4.39)]{} -\text{div}\frac{\partial \bar{A}_e}{\partial t} - \underbrace{\text{div}\left(\text{grad}\, V_e\right)}_{\Delta V_e} = \frac{\rho_v}{\varepsilon};\left(\pm\varepsilon\mu\frac{\partial^2 V_e}{\partial t^2}\right) \tag{4.42}$$

$$\Delta V_e - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 V_e}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\,\bar{A}_e + \varepsilon\mu\frac{\partial V_e}{\partial t}\right) \tag{4.43}$$

In regim variabil (înaltă frecvență) se admite o condiție de etalonare a celor două potențiale- *etalonare Lorentz*- care presupune:

$$\text{div}\,\bar{A}_e + \varepsilon\mu\frac{\partial V_e}{\partial t} = 0 \tag{4.44}$$

spre deosebire de regimul staționar(cvasistaționar) unde se admite pentru potențialul magnetic vector $\bar{A}$ o condiție de etalonare Coulomb, de forma: $\text{div}\,\bar{A} = 0$.

Impunând condiția (4.44), fiecare dintre ecuațiile (4.41) şi (4.43) rămâne o ecuție numai în variabila $\bar{A}_e$ sau numai în V_e de aceeaşi formă:

$$\Delta\bar{A}_e - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \bar{A}_e}{\partial t^2} = -\mu\bar{J} \tag{4.45}$$

$$\Delta V_e - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 V_e}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{4.46}$$

Cele două ecuații poartă numele de *ecuația vectorială neomogenă a undelor* (4.45), respectiv *ecuația scalară neomogenă a undelor* (4.46), ambele sunt de același tip cu *ecuația undelor* (4.11), care este însă o ecuație omogenă.

In regim staționar sau cvasistaționar $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$ ecuațiile (4.45), (4.46) devin ecuații de tip Poisson (Laplace) satisfăcute de $\bar{A}$ şi V în aceste regimuri şi ale căror soluții sunt de forma :

$$\bar{A}\left(\bar{r}\right)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{v_\infty}\frac{\bar{J}\left(\bar{r}'\right)}{R}dv' \quad ; \quad V\left(\bar{r}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v_\infty}\frac{\rho_v\left(\bar{r}'\right)}{R}dv' \tag{4.47}$$

în care am utilizat notații cu semnificațiile din figura 4.6.

Soluțiile ecuațiilor (4.45) şi (4.46) sunt similare cu soluțiile (4.47), sub forma:

$$\bar{A}_e\left(\bar{r},t\right)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{v_\infty}\frac{\bar{J}\left(\bar{r}',t-\sqrt{\varepsilon\mu}R\right)}{R}dv' \tag{4.48}$$

$$V_e\left(\bar{r},t\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v_\infty}\frac{\rho_v\left(\bar{r}',t-\sqrt{\varepsilon\mu}R\right)}{R}dv' \tag{4.49}$$

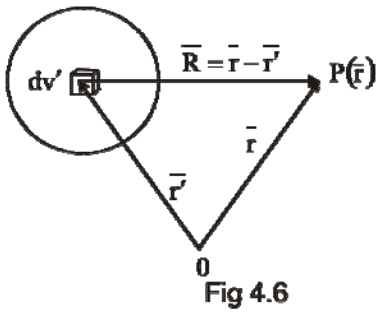


Fig 4.6

Câmpul în punctul $P\left(\bar{r}\right)$, la momentul t, este determinat de valoarea densității de curent $\bar{J}$ (sau a densității de sarcină ρ_v) la un moment anterior $t'=t-\sqrt{\varepsilon\mu}R=t-\frac{R}{v}=t-\Delta t$, momentului t cu $\Delta t=\frac{R}{v}=\sqrt{\varepsilon\mu}R$. Timpul Δt este timpul necesar ca unda electromagnetică să se propage de la circuitul radiant până în punctul $P\left(\bar{r}\right)$, pe distanța $R=\left|\bar{R}\right|=\left|\bar{r}-\bar{r}'\right|$ înaintând cu viteza v, viteza *de propagare* a undei prin mediul cu parametrii constitutivi (ε,μ). Timpul Δt este *timpul de întârziere(retardare)* între mărimile de stare ale circuitului radiant şi ale câmpului la distanța R de circuit; motiv pentru care $\bar{A}_e$ şi V_e date de (4.48) şi (4.49) se numesc *potențiale electrodinamice întârziate(retardate).*Aceste expresii ale potențialelor(şi ale câmpului electromagnetic) descriu propagarea câmpului electromagnetic din aproape în aproape, în timp şi în spațiu(prin contiguitate) cu viteză mare, dar finită: $v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

4.6.2 Rezistența de radiație a circuitelor

Puterea activă absorbită de un circuit electric în regim sinusoidal este $P_j = RI_{ef}^2 = RI^2$, unde R este rezistența circuitului radiant.

La frecvențe înalte circuitul radiază unde electromagnetice, deci va transmite putere activă şi prin undele radiate, putere pe care o scriem sub forma: $P_{rad} = R_{rad} I^2$, unde R_{rad} este *rezistența de radiație* a circuitului.

Puterea activă totală absorbită de circuit este : $P = P_j + P_{rad}$.

Dacă circuitul radiant are forma curbei Γ din figura 4.7-a, câmpul magnetic $\overline{B}$ în punctele suprafeței S_Γ va fi defazat în urma curentului $\underline{I}$ din spira Γ din cauza timpului de propagare Δt (datorită retardării dintre $\overline{B}$ şi $\underline{I}$). Deci şi fluxul magnetic printr-o suprafață S_Γ va fi defazat în urma curentului $\underline{I}$ cu unghiul β ca în diagrama fazorială din figura 4.7-b, defazare care creşte odată cu frecvența curentului: $\beta = \beta(\omega)$.

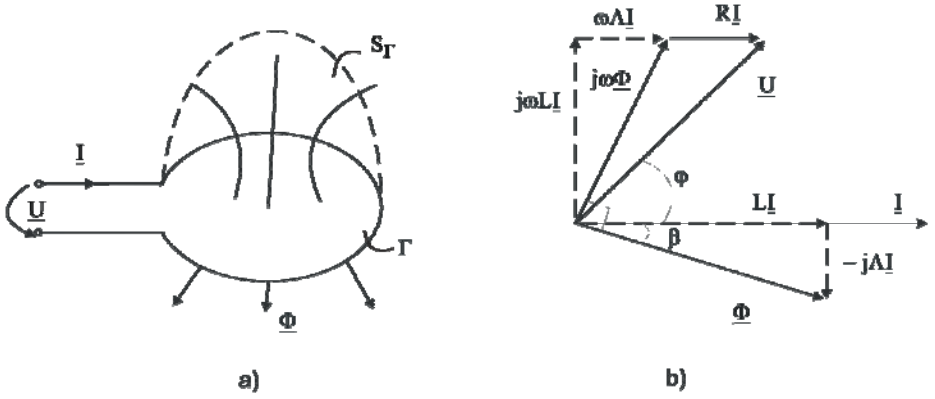


Fig 4.7

Descompunem fluxul $\underline{\Phi}$ în două componente, una în fază cu $\underline{I}$ şi alta în cuadratură cu curentul $\underline{I}$, sub forma:

$$\underline{\Phi} = L\underline{I} - j\Lambda\underline{I} \tag{4.50}$$

Ecuația de tensiuni pentru circuitul radiant este de forma:

$$u = Ri + \frac{d\Phi}{dt} \quad \leftrightarrow \quad \underline{U} = R\underline{I} + j\omega\underline{\Phi} = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} + \omega\Lambda\underline{I}$$

respectiv ecuația de tensiuni a unui circuit radiant are expresia:

$$\underline{U} = \left[(R + \omega\Lambda) + j\omega L\right] \cdot \underline{I} \tag{4.51}$$

unde: $R_e = R + \omega\Lambda$ - este *rezistența echivalentă* a circuitului radiant;

$\omega\Lambda = R_{rad}$ este *rezistența de radiație* a circuitului iar R este *rezistența proprie* a circuitului, evaluată cu luarea în considerare a efectului pelicular din înaltă frecvență.

$\underline{Z}_e = R_e + j\omega L$ - este *impedanța echivalentă* a circuitului, cea care introduce un defazaj φ între $\underline{U}$ și $\underline{I}$ ca în figura 4.7-b.

4.7 Aplicație

Dacă se cunoaşte una dintre componentele undei plane şi proprietățile mediului, se poate deduce cealaltă componentă:

1. In medii dielectrice $(\sigma = 0)$ cunoscând $\bar{E} = \bar{j}E$ şi impedanța de undă $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ se poate deduce cealaltă componentă(cea magnetică):

$$\dot{\bar{H}} = \frac{\bar{i} \times \dot{\bar{E}}}{Z} = \bar{k}\dot{H} = \bar{k}\frac{\dot{E}}{Z}$$

2. In medii conductoare $(\sigma \neq 0)$ legătura între cele două componente ale undei este de forma:

$$\dot{\bar{H}} = \frac{|\underline{\gamma}|}{\mu\omega} e^{j\Omega}\left(\bar{i} \times \dot{\bar{E}}\right) = \bar{k}\frac{\gamma E}{\omega\mu} e^{j\Omega}$$

unde $\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega\sigma\mu} = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}(1+j)$ este *constanta de propagare* a mediului $\left(\underline{\gamma} = \alpha + j\beta\right)$, $\alpha = |\underline{\gamma}|\cos\Omega$ este *constanta de atenuare* iar $\beta = |\underline{\gamma}|\sin\Omega$ este *constanta de defazare* a mediului $\left(\alpha^2 - \beta^2 = \omega^2\varepsilon\mu\right)$.

3. Unda plană având $H_o = 5\,{}^{A}\!/_{m}$ trece printr-un mediu cu $\mu_r = 1, \varepsilon_r = 4$. Componenta electrică a undei este:

$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = R = 60\pi[\Omega]$ - rezistența de undă a mediului

$$E = H\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = HZ_o\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = H \cdot \frac{1}{2} \cdot 120\pi = 300\left[{}^{V}\!/_{m}\right]$$

Observație Vectorul $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$, numit *vectorul Poynting* indică prin direcția sa care este direcția de propagare a undei iar prin modulul său indică care este densitatea de putere a undei: $[S] = [E] \cdot [H] = \frac{V}{m} \cdot \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}$. Fluxul lui $\bar{S}$ printr-o suprafață este puterea transmisă de undă prin suprafața respectivă.

5. Regimul electrostatic şi magnetostatic

În regim variabil în timp câmpul electric şi magnetic se intercondiționează reciproc alcătuind un câmp electromagnetic.

În regim staționar (curent continuu), mărimile de stare sunt invariabile în timp şi studiul câmpului electric şi magnetic se poate face separat. În acest regim câmpul electric din medii conductoare generează curent electric şi este însoțit de degajare de căldură în mediul conductor.

Un sistem fizic format din corpuri imobile $\left(\overline{v}=0\right)$ încărcate cu sarcini invariabile în timp $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$ creează un *câmp electrostatic*. În *regim electrostatic* mărimile magnetice de stare sunt nule iar mărimile electrice de stare (ale corpurilor şi ale câmpului) sunt invariabile în timp; într-un astfel de regim nu există schimburi de energie între componentele sistemului. Neexistând câmp electrostatic şi nici curent electric în interiorul corpurilor conductoare, nu au loc transformări energetice (dezvoltări de căldură). Practic,un câmp electrostatic este creat de *corpuri imobile încărcate cu sarcini invariabile în timp.* Deci condițiile de regim electrostatic sunt:

$$\frac{\partial}{\partial t}=0;\qquad \overline{v}=0;\qquad \overline{J}=0;\qquad \overline{B}=\overline{H}=0 \tag{5.1}$$

În condițiile (5.1) legile vor avea forme particulare:

-) Din legea inducției electromagnetice, dacă $\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}=0,\ \overline{v}=0$ rămâne:

$$\oint_{\Gamma}\overline{E}\,\overline{d\ell}=0\ ;\ \text{rot}\,\overline{E}=0\quad\leftrightarrow\quad \overline{E}=-\text{grad}\,V \tag{5.2}$$

Expresia (5.2) este *teorema potențialului electrostatic* sub formă integrală, respectiv locală. Mărimea ”V” este *potențialul electrostatic* , câmpul electrostatic $\overline{E}$ este un *câmp potențial* (care poate fi scris ca un gradient), circulația lui pe o curbă Γ închisă este nulă iar între două puncte 1şi 2 circulația nu depinde de drumul de integrare:

$$\int_1^2\overline{E}\,\overline{d\ell}=\int_1^2-\nabla V\overline{d\ell}=-\int_1^2 dV=V_1-V_2 \tag{5.3}$$

-) Legea fluxului electric are aceeaşi formulare şi în regim electrostatic:

$$\int_{\Sigma}\overline{D}\,\overline{ds}=q_{\Sigma}\ ;\ \text{div}\,\overline{D}=\rho_v\left(\text{sau}\,0\right)\ ;\ \text{div}_s\,\overline{D}=D_{n_2}-D_{n_1}=\rho_s\left(\text{sau}\,0\right) \tag{5.4}$$

-) Legea legăturii în câmp electric :

$$\bar{D} = \varepsilon_o \bar{E} + \bar{P} \quad ; \quad \left[\; \bar{P}_t = \varepsilon_o \chi_e \bar{E} \quad ; \quad \bar{D} = \varepsilon \bar{E} \; \right] \tag{5.5}$$

Celelalte legi nu prezintă interes în studiul regimului electrostatic .

5.1 Teorema potențialului electrostatic

Deoarece în regim electrostatic mărimile de stare ale câmpului electric şi ale corpurilor sunt invariabile în timp, starea electrostatică a unui sistem fizic (corpuri+câmp) se poate menține fără aport de energie din exterior. Pentru o sarcină punctiformă expresia câmpului electric creat este :

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\bar{r}}{r^3} \tag{5.6}$$

Să arătăm că şi în acest caz este verificată expresia teoremei (5.2):

$$\begin{cases} \oint_\Gamma \bar{E}\, d\bar{\ell} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o} \oint_\Gamma \dfrac{\bar{r}\, d\bar{\ell}}{r^3} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o} \oint \dfrac{r\, dr}{r^3} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o} \oint_\Gamma d\left(\dfrac{1}{r}\right) = 0 \\ \text{rot}\bar{E} = \nabla \times \left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o} \dfrac{\bar{r}}{r^3} \right) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o} \nabla\left(\dfrac{1}{r^3}\right) \times \bar{r} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o} \dfrac{-3}{r^4} \left(\dfrac{\bar{r}}{r} \times \bar{r} \right) = 0 \\ dV = -\bar{E} d\bar{r} = \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_o} \dfrac{\bar{r}\, d\bar{r}}{r^3} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o} d\left(\dfrac{1}{r}\right) \rightarrow V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o} \dfrac{1}{r} + C \end{cases} \tag{5.7}$$

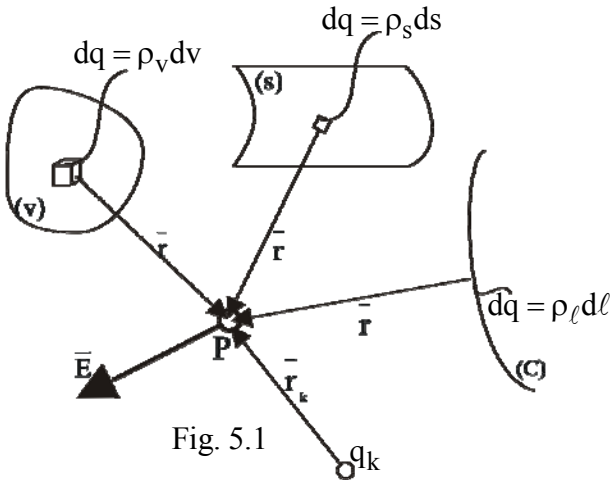


Fig. 5.1

Expresia locală $\text{rot}\bar{E} = 0$ pune în evidență faptul că liniile lui $\bar{E}$ sunt deschise, ele încep pe sarcini (+) şi se termină pe sarcini (–). Expresia (5.7) a potențialului arată că dacă îl calculăm la distanță mare de sarcina punctiformă $(r \rightarrow \infty)$ atunci constanta de integrare este $C = V_\infty$.

La infinit depărtare de q câmpul $\bar{E}$ este nul şi admitem că şi $V_\infty = 0 \; (C = 0)$ şi în acest caz (sarcina punctiformă) expresia potențialului este:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r} \tag{5.8}$$

Alegerea punctului unde $V = 0$ se numeşte *alegerea originii de potenţial* faţă de care expresia (5.8) rămâne valabilă.

Dacă avem un sistem cu distribuţiile ρ_v, ρ_s, ρ_ℓ şi sarcini punctiforme q_k ca în figura 5.1, atunci câmpul rezultant în punctul P se scrie cu teorema superpoziţiei (vectoriale) a câmpurilor create de fiecare sarcină în parte (fiecare element dq creează câmp de forma 5.6 : $d\bar{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\bar{r}}{r^3}$), deci:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\int_V \frac{\rho_v \bar{r}}{r^3}dv + \int_S \frac{\rho_s \bar{r}}{r^3}ds + \int_C \frac{\rho_\ell \bar{r}}{r^3}d\ell + \sum_1^n \frac{q_k \bar{r}_k}{r_k^3}\right] \tag{5.9}$$

Expresia (5.9) este *expresia generală a câmpului electrostatic* creat de toate distribuţiile de sarcină (numit şi câmp electric *coulombian* , expresia (5.6) se poate stabili pe baza forţei de tip coulombian). Punctul P în care calculăm câmpul $\bar{E}$ nu poate fi în interiorul corpurilor încărcate, integralele din (5.9) nu ar mai fi convergente când $r \to 0$. Fiind integrale din funcţii vectoriale ele trebuie calculate pe componente.

Dacă pentru o sarcină punctiformă potenţialul electrostatic are expresia (5.8), atunci potenţialul punctului P din figura 5.1. se obţine tot printr-o superpoziţie (scalară) a potenţialelor create de fiecare sarcină în parte:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\int_V \frac{\rho_v dv}{r} + \int_S \frac{\rho_s ds}{r} + \int_C \frac{\rho_\ell d\ell}{r} + \sum_1^n \frac{q_k}{r_k}\right] \tag{5.10}$$

Expresia (5.10) este valabilă în raport cu originea de potenţial la infinit (deci nici unul dintre corpurile din fig. 5.1 nu este infinit extins pentru a se păstra convenţia $V_\infty = 0$). Nici pentru calculul lui V cu (5.10) punctul P nu poate fi decât punct exterior tuturor corpurilor încărcate pentru ca integralele din (5.10) să fie convergente. Toate integralele din (5.10) sunt din funcţii scalare, deci mai uşor de calculat ca (5.9), respectiv este mai indicat a se calcula prima dată V cu (5.10) şi apoi $\bar{E} = -\text{grad}\, V$.

5.1.1 Proprietățile potențialului electric V

1. Alegerea originii de potențial:

Dacă se cunoaşte valoarea potențialului într-un punct $P_o(V_{P_o})$, atunci potențialul într-un punct oarecare P va fi:

$$V_P = V_{P_o} - \int_{P_o}^{P} \overline{E}\,\overline{d\ell} \tag{5.11}$$

Potențialul V_P caracterizează câmpul $\overline{E}_P$ în fiecare punct şi se poate determina cu aproximația unei constante V_{P_o} .Dacă se adoptă $V_{P_o} = 0$, atunci punctul P_o este considerat referință (origine de potențial).Alegerea originii de potențial se face în diverse moduri:

– pentru sistem restrâns de corpuri încărcate, originea de potențial se consideră punctul de la infinit, acolo $E_\infty = 0$ şi $V_\infty = 0$

– pentru sisteme practice în care se precizează poziția corpurilor încărcate în raport cu pământul sau cu masa (carcasa aparatului) atunci originea de potențial se consideră pământul (masa)

– pentru probleme teoretice în care apar corpuri încărcate cu dimensiuni infinite (suprafețe încărcate infinit extinse, fire foarte lungi, etc) punctul origine de potențial se adoptă arbitrar şi expresiile calculate pentru V trebuie precizat în raport cu care origine de potențial sunt adevărate.

2. Valențele energetice ale potențialului

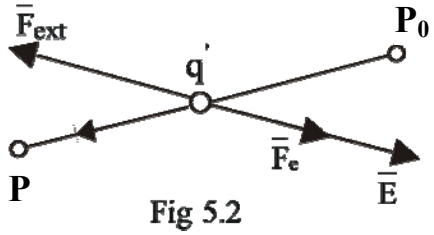


Fig 5.2

Pentru a deplasa o sarcină q' într-un câmp electrostatic $\overline{E}$ din punctul origine de potențial $P_o(V_{P_o} = 0)$ până într-un punct curent P din câmp, trebuie cheltuit un lucru mecanic:

$$L = \int_{P_o}^{P} \overline{F}_{ext}\,\overline{d\ell} = q' \int_{P_o}^{P} -\overline{E}\,\overline{d\ell} = q' V_P \tag{5.12}$$

Deci potențialul punctului P (V_P) este egal numeric cu lucrul mecanic ce ar trebui efectuat de câmp pentru a deplasa unitatea de sarcină ($q' = 1C$) din P în P_o, sau este egal numeric cu lucrul mecanic ce ar trebui efectuat din exterior pentru a deplasa unitatea de sarcină din P_o în P.

Potenţialul nu este lucru mecanic, se măsoară în volţi nu în jouli, numai este egal numeric cu el. În fiecare punct din câmp potenţialul V are o valenţă energetică, el caracterizează energetic câmpul electrostatic din acel punct. Potenţialul V arată care este potenţa câmpului în acel punct, respectiv capacitatea câmpului de a efectua lucru mecanic.

3. Proprietăţile geometrice ale potenţialului V

Legătura punctuală dintre câmpul $\overline{E}$ şi potenţialul său V:

$$dV = -\overline{E}\,\overline{d\ell} \tag{5.13}$$

ne permite să interpretăm geometric această legătură:

- Suprafeţele echipotenţiale (V=constant, dV=0) înseamnă

$\overline{E}\,\overline{d\ell} = 0$, respectiv $\overline{E} \perp \overline{d\ell}$, liniile câmpului $\overline{E}$ sunt perpendiculare pe suprafeţele echipotenţiale (în care este conţinut $\overline{d\ell}$).Cunoscând liniile (suprafeţele) echipotenţiale ale unui sistem, se pot trasa liniile de câmp $\overline{E}$ ca fiind normale în orice punct cu suprafeţele echipotenţiale(figura 5.3).

Punctele unui corp conductor au legătură galvanică între ele, deci se află la acelaşi potenţial. Rezultă că liniile câmpului electric întotdeauna ies şi intră perpendicular pe suprafeţele corpurilor conductoare încărcate cu sarcină.

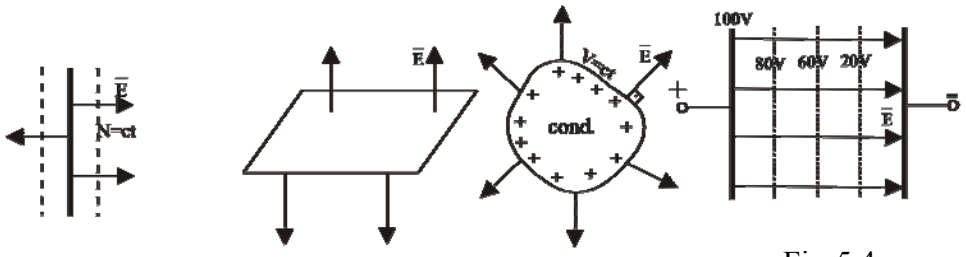


Fig 5.3

Fig 5.4

- În lungul liniilor de câmp electric $(\overline{E} \uparrow\uparrow \overline{d\ell})$ avem:

$$dV = -\overline{E}\,\overline{d\ell} < 0 \tag{5.14}$$

Deci în lungul liniilor lui $\overline{E}$ potenţialul V scade sau reciproc, liniile lui $\overline{E}$ sunt orientate dinspre regiunea cu potenţial mai ridicat (mai pozitiv) spre cea cu potenţial mai scăzut (figura 5.4).

- Fie două suprafeţe echipotenţiale între care diferenţa de potenţial este de dV=const.

$$dV_{12} = E_1 \cdot \Delta_{12} = dV_{34} = E_2 \cdot \Delta_{34}$$

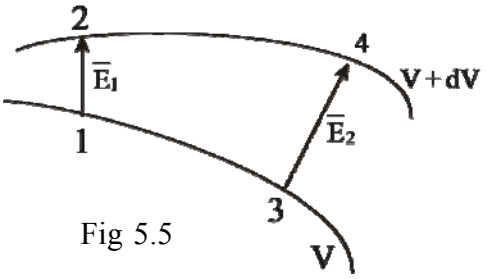


Fig 5.5

Cum în figura 5.5 distanța $\Delta_{12} < \Delta_{34} \Rightarrow E_1 > E_2$
Câmpul electric este mare (intens) acolo unde suprafețele echipotențiale sunt mai apropiate. Dacă facem o analogie între spectrul unui câmp electrostatic (liniile câmpului $\bar{E}$ corelate cu liniile echipotențiale V=const.) şi o problemă de cartografie în care *curbele de nivel* (ce unesc punctele de aceeaşi altitudine) sunt echivalentul *liniilor echipotențiale* (de acelaşi V), atunci corespondența ar fi:

linii echipotențiale $\leftrightarrow$ curbe de nivel
intensitatea câmpului electrostatic $\leftrightarrow$ panta terenului

Acolo unde curbele de nivel sunt apropiate, panta terenului este mare, acolo unde liniile echipotențiale sunt apropiate, intensitatea câmpului electric este mare.

4. *Ecuațiile satisfăcute de funcția V*

Dacă $\bar{E} = -\nabla V = -\text{grad}V$ şi $\text{div}\bar{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon}$ (relația 3.10) atunci :

$$\text{div}\bar{E} = \nabla\bar{E} = \nabla\left(-\nabla V\right) = -\Delta V \quad \rightarrow \quad \Delta V = -\frac{\rho_V}{\varepsilon} \tag{5.15}$$

respectiv potențialul electrostatic V este soluția unei ecuații cu derivate parțiale (5.15) *de tip Poisson*, pentru probleme interioare, respectiv în interiorul corpurilor încărcate cu sarcină.
Pe domenii exterioare, în exteriorul corpurilor încărcate ($\rho_V = 0$) rămâne:

$$\Delta V = 0 \tag{5.16}$$

care este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi, *de tip Laplace.*

Soluția ecuațiilor (5.15) şi (5.16) este univocă dacă sunt precizate *condițiile la limită* pe frontiera Σ a domeniului de câmp ν_Σ. Aceste condiții sunt de trei feluri:

- condiții de *speța întâi* (de tip Dirichlet) când se cunoaşte potențialul V pe frontiera domeniului: $V_\Sigma = f_D$. Dacă $V_\Sigma = 0$, avem o condiție Dirichlet omogenă sau $V_\Sigma = \text{const}$, care presupune că frontiera Σ este o suprafață conductoare.

- condiţii de *speţa a doua* (de tip Neumann) când se cunoaşte componenta normală a inducţiei electrice pe frontiera Σ: $(D_n)_\Sigma = f_N$ sau $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_\Sigma = \frac{1}{\varepsilon} f_N$, deci derivata după normala exterioară la Σ a potenţialului V, care este componenta normală a câmpului electric : $E_n = \frac{\partial V}{\partial n}$. O condiţie Neumann omogenă $D_n|_\Sigma = 0$ precizează că fluxul electric prin frontiera Σ este nul.
- condiţii de frontieră *mixte* (de tip Robin) când se cunoaşte potenţialul pe o parte Σ_D din frontieră şi componenta $\frac{\partial V}{\partial n}$ pe cealaltă parte Σ_N a frontierei $(\Sigma_D \cup \Sigma_N = \Sigma)$.

Dacă mediul nu este omogen ($\varepsilon \neq$ const) atunci: $\overline{D} = \varepsilon \overline{E} = \varepsilon(-\nabla V)$

iar: $\operatorname{div}\overline{D} = \rho_v \rightarrow \nabla\left[\varepsilon(-\nabla V)\right] = \rho_v \rightarrow \varepsilon\Delta V + \operatorname{grad}V \cdot \operatorname{grad}\varepsilon = -\rho_v$ (5.17)

Ecuaţia (5.17) pe care o satisface funcţia V în medii neomogene este o ecuaţie specială de potenţial, căreia i se asociază aceleaşi trei genuri de condiţii la limită. Dacă ε =const (grad ε=0) ecuaţia (5.17) se reduce la (5.15) pentru probleme interioare sau la (5.16) pentru probleme exterioare.

Scrise în coordonate carteziene, respectiv cilindrice, ecuaţia (5.15) devine

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{-1}{\varepsilon}\rho_v \qquad (\text{sau } 0) \qquad (5.15')$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{-1}{\varepsilon}\rho_v \ (\text{sau } 0) \qquad (5.15'')$$

Funcţia V soluţie a ecuaţiilor precedente este o funcţie continuă în orice punct din spaţiu, chiar şi pentru o discontinuitate $V_{stânga} = V_{dreapta}$. Dacă V ar prezenta discontinuităţi (salturi), în acel punct $\overline{E} = -\nabla V$ ar deveni infinit; cum câmpuri electrice infinite nu există, nici potenţiale electrice discontinui nu pot exista.

Potenţialul şi câmpul unui dipol electric

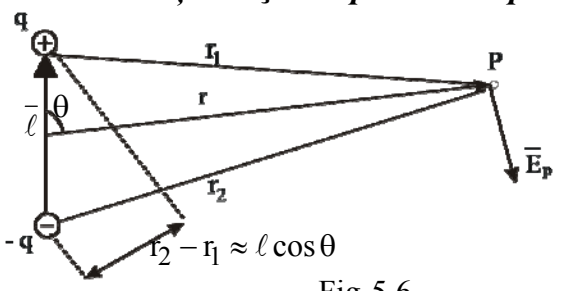


Fig 5.6

Două sarcini ±q aflate la distanţa $\overline{\ell}$ şi pentru care $\overline{p}_d = q\overline{\ell} = \text{const}$ este *momentul dipolului,* formează un dipol electric. Potenţialul punctului P din figura 5.6 este:

$$V_p = V_1 + V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \qquad (5.18)$$

Dacă ținem seama că $\frac{\ell}{r} << 1 \;\rightarrow\; r_2 - r_1 = \ell\cos\theta$ şi $r_1 r_2 = r^2$

$$V_p = \frac{q\ell\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\bar{p}\,\bar{r}}{r^3} \qquad (5.19)$$

Se observă că planul median $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ este un plan echipotențial având $V = 0$ şi de asemenea punctele foarte îndepărtate ($r \rightarrow \infty$) sunt tot de potențial nul. Intensitatea câmpului electric în punctul P este:

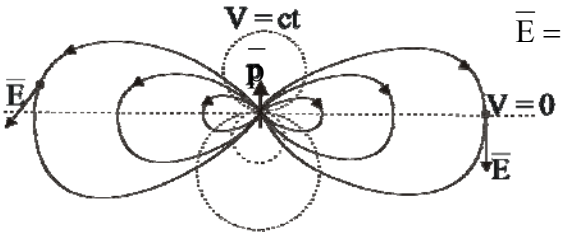


Fig 5.7

$$\bar{E} = -\text{grad}V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\text{grad}\left(\frac{\bar{p}\,\bar{r}}{r^3}\right) \qquad (5.20)$$

$$\begin{cases} \nabla(\bar{p}\,\bar{r}) = \bar{i}\,p_x + \bar{j}\,p_y + \bar{k}\,p_z = \bar{p} \\ \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{-3}{r^4}\,\frac{\bar{r}}{r} = \frac{-3\,\bar{r}}{r^5} \end{cases}$$

Înlocuind în (5.20)

Se obține expresia câmpului $\bar{E}$

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[3\frac{(\bar{p}\,\bar{r})\,\bar{r}}{r^5} - \frac{\bar{p}}{r^3}\right] \qquad (5.21)$$

Spre deosebire de câmpul unei sarcini punctiforme care scade cu r^2, câmpul unui dipol scade cu r^3, este foarte intens lângă dipol şi nu mai are o simetrie sferică, valoarea sa nu depinde numai de r ci şi de direcția razei vectoare $\bar{r}$. Liniile de câmp electric şi liniile echipotențiale ale unui dipol electric au geometria din figura 5.7.

5.2 Capacități electrice

Un sistem format din două corpuri conductoare omogene, încărcate cu sarcini electrice egale şi de semn contrar ($q_1 = -q_2 = q$) şi separate printr-un dielectric omogen sau neomogen, dar pasiv (neîncărcat cu sarcină $\rho_v = 0$ şi nepolarizat permanent $\bar{P}_p = 0$) formează un *condensator electric*.

Capacitatea electrică a condensatorului este mărimea pozitivă definită ca raportul dintre sarcina unuia dintre conductoare (numit armătură) şi tensiunea dintre armături:

$$C = \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{q_1}{U_{12}} = \frac{q_2}{U_{21}} = \frac{q}{U} \quad \left[\frac{C}{V} = F\right] \tag{5.22}$$

Practic, cele două conductoare formează un condensator, dacă aplicând o tensiune între armături, ele creează un *câmp electric complet* (toate liniile de câmp ce pleacă de pe o armătură ajung pe cealaltă).

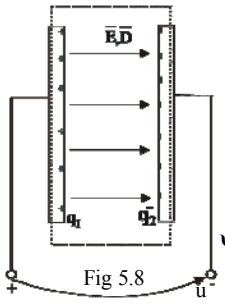


Fig 5.8

Alegem o suprafață închisă Σ (figura 5.8) ce trece prin cele două armături (unde $\overline{D} = \varepsilon\overline{E} = 0$) şi se închide în exterior astfel încât să nu intersecteze liniile de câmp. Atunci:

$$\Psi_\Sigma = q_\Sigma = 0 \;\rightarrow\; q_\Sigma = q_1 + q_2 = 0 \;\rightarrow\; q_1 = -q_2 \tag{5.23}$$

Deci dacă $q_1 = -q_2$ condensatorul creează un câmp electric complet.

Capacitatea unui condensator (5.22) este o mărime pozitivă definită ca raportul dintre q şi U dar nu depinde nici de q nici de U (dacă dielectricul este liniar $\varepsilon \neq \varepsilon(E)$) ci depinde de:

- *geometria condensatorului* (forma şi dimensiunea armăturilor,distanța dintre ele, nu contează materialul şi nici grosimea lor)
- *proprietățile electrice* ale dielectricului (ε_r). Calculul capacității se poate face prin algoritmii prezentați în schema din figura 5.8'.

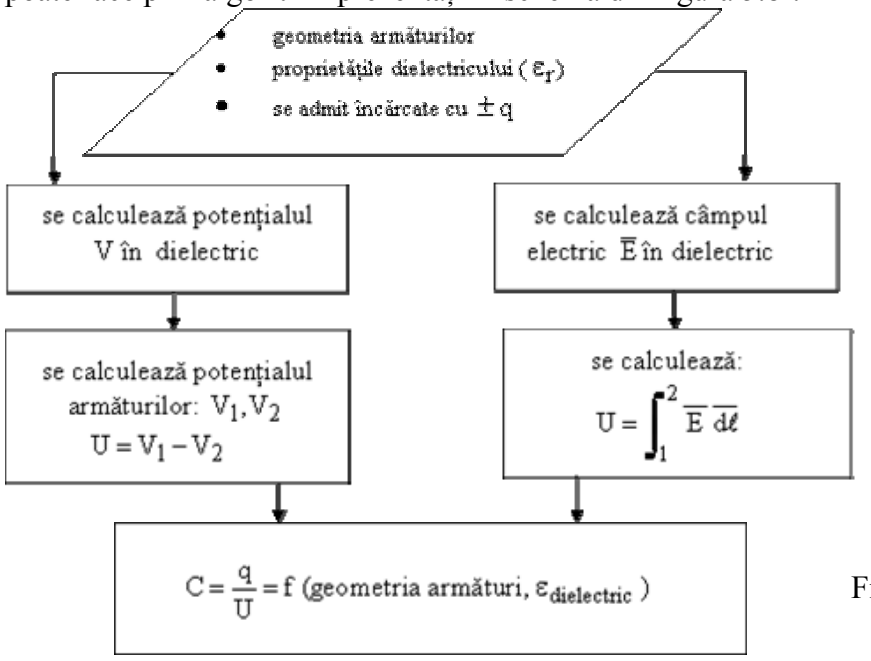


Fig.5.8'

1. ***Condensatoul plan***

Dacă distanța între armături este mică şi neglijăm efectul de margine atunci câmpul electric este uniform. Pentru o suprafață închisă Σ având aria cuprinsă în câmp ΔS, aplicăm legea fluxului electric:

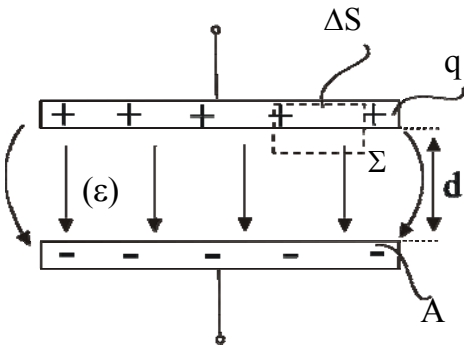


Fig 5.9

$$\psi_\Sigma = \int_\Sigma \overline{D}\,\overline{ds} = \int_\Sigma Dds = D\cdot\Delta S = \Delta q$$

$$D = \frac{\Delta q}{\Delta S} = \rho_s = \frac{q}{A} \quad \rightarrow \quad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon A} \qquad (5.24)$$

Mergând pe algoritmul din dreapta al fig. 5.8, calculăm succesiv:

$$U = \int_1^2 \overline{E}\,\overline{d\ell} = Ed = \frac{qd}{\varepsilon A} \quad \rightarrow \quad C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon A}{d} \qquad (5.25)$$

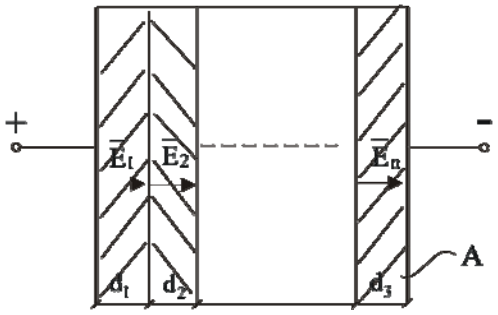


Fig 5.10

Expresia (5.25) rămâne valabilă şi pentru condensatoare cu armături curbe, dacă distanța dintre armături este mică față de raza de curbură a armăturilor.

Dacă condensatorul plan are dielectricul format din mai multe straturi (figura 5.10), la trecerea prin suprafețele de discontinuitate dintre straturi se conservă D_n :

$$D_{n_1} = D_{n_2} = ... = D_{n_n} \quad \rightarrow \quad D_1 = D_2 = ... = D_n = \frac{q}{A} \qquad (5.26)$$

iar intensitățile câmpului sunt:

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{q}{\varepsilon_1 A}; \quad ..... \quad E_n = \frac{D_n}{\varepsilon_n} = \frac{q}{\varepsilon_n A} \qquad (5.27)$$

Tensiunea dintre armături are expresia:

$$U = \int_1^n \overline{E}\,\overline{d\ell} = \int_1^2 \overline{E}_1\,\overline{d\ell} + \int_2^3 \overline{E}_2\,\overline{d\ell} + \ldots + \int_{n-1}^n \overline{E}_n\,\overline{d\ell} =$$

$$= \frac{q}{A}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \ldots\right) = \frac{q}{A}\sum_1^n \frac{d_k}{\varepsilon_k} \qquad (5.28)$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{A}{\sum_1^n \frac{d_k}{\varepsilon_k}} \qquad (5.29)$$

Expresia (5.29) a capacității pune în evidență faptul că acest condensator (fig. 5.10) poate fi privit şi ca un ansamblu de n condensatoare legate în serie.

2. *Condensatorul cilindric*

Armăturile sunt doi cilindrii coaxiali (figura 5.11) de lungime ℓ şi raze r_1 şi r_2 , dielectricul are permitivitate ε. Aplicăm legea fluxului electric pentru suprafața cilindrică Σ având r ϵ (r_1,r_2):

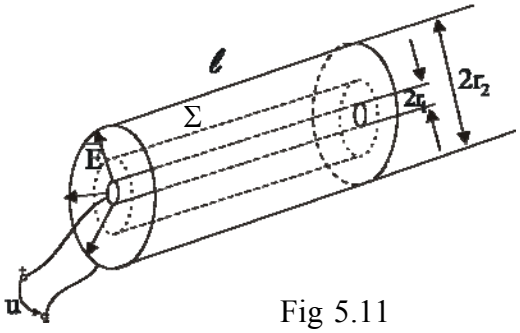


Fig 5.11

$$\psi_\Sigma = \int_\Sigma \overline{D}\,\overline{ds} = D\int_{\Sigma_{lat}} ds = D\cdot 2\pi r\ell = q \qquad (5.30)$$

$$D = \frac{q}{2\pi r\ell} = \frac{\rho_\ell}{2\pi r} \quad \rightarrow \quad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{q}{2\pi\varepsilon r\ell} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad U = \int_1^2 \overline{E}\,\overline{d\ell} = \frac{q}{2\pi\varepsilon\ell}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon\ell}\ln\frac{r_2}{r_1} \qquad (5.31)$$

Capacitatea condensatorului cilindric va avea expresia:

$$C = \frac{q}{A} = \frac{2\pi\varepsilon\ell}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \qquad (5.32)$$

3. *Condensatorul sferic*

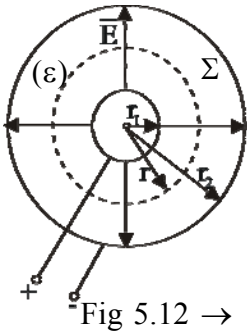


Fig 5.12 →

Armăturile sunt două sfere concentrice cu razele r_1 şi r_2 iar suprafaţa Σ este o sferă intermediară:

$$\psi_\Sigma = \int_\Sigma \overline{D}\,\overline{ds} = D\int_\Sigma ds = D\cdot 4\pi r^2 = q \quad \rightarrow$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon} \rightarrow u = \int_1^2 \overline{E}\overline{dl} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \quad (5.33)$$

Capacitatea condensatorului sferic are expresia :

$$C = \frac{q}{u} = 4\pi\varepsilon\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \qquad (5.34)$$

Capacitatea unei sfere de rază r_1 izolată (capacitatea este formată în raport cu infinitul)se obţine din expresia (5.34) dacă $r_2 \to \infty$:

$$C_{sferă} = 4\pi\varepsilon r_1 \qquad (5.35)$$

Dacă L este lungimea unei linii de câmp electric dintre cele două armături iar A este aria unei suprafeţe echipotenţiale între armături, atunci elastanţa $S = \frac{1}{C}$ a condensatorului se poate evalua succesiv sub forma:

$$S = \frac{u}{q} = \int_1^2 \frac{\overline{E}\,\overline{d\ell}}{\int_A \overline{D}\,\overline{ds}} = \int_1^2 \frac{E\,d\ell}{\varepsilon E A} = \int_1^2 \frac{d\ell}{\varepsilon A} \qquad (5.36)$$

Capacitatea va avea o expresie reciprocă cu (5.36), de forma:

$$C = \int_A \frac{\varepsilon dA}{\ell} \qquad (5.36)$$

Expresiile (5.35) şi (5.36) permit să extindem *metoda tuburilor şi feliilor* (3.86, 3.88) la calculul capacităţilor şi elastanţelor.

Dacă regiunea dintre armături o împărţim în tuburi de flux electric elementare cu secţiunea ds, luate în lungul liniilor de câmp $\overline{E}$, atunci capacitatea unui tub este:

$$dC_{tub} = \frac{\varepsilon\,dA}{\ell_{tub}} \quad \rightarrow \quad C = \int dC = \int_A \frac{\varepsilon\,dA}{\ell} \qquad (5.37)$$

O felie din dielectric de grosime $d\ell$ luată $\perp$ pe linia de câmp $\overline{E}$ va avea elastanța:

$$dS_{felie} = \frac{d\ell}{\varepsilon A} \quad \rightarrow \quad S = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{d\ell}{\varepsilon A} \qquad (5.38)$$

Dacă funcția „ℓ” din (5.37) sau A din (5.38) sunt greu de evaluat pentru un dispozitiv cu geometrie neregulată, atunci tuburile şi feliile nu se vor lua infinitezimale, tuburile vor avea secțiunile ΔA_k şi lungimile ℓ_k iar feliile vor avea grosimile $\Delta\ell_k$ şi secțiunile A_k, respectiv:

$$S = \frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta\ell_k}{\varepsilon_k A_k} \; ; \qquad C = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k \Delta A_k}{\ell_k} \qquad (5.39)$$

Aplicații:

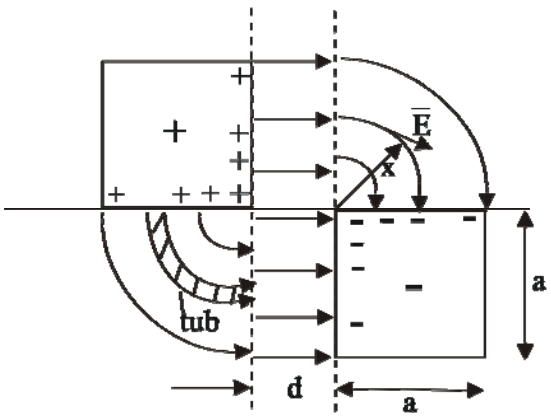


Fig. 5.13

1. Două bare conductoare de lungime ℓ şi secțiune pătratică cu latura „a’’ sunt plasate ca în figura 5.13 şi alimentate cu tensiunea continuă U. Să se determine:

a) expresia câmpului electric creat $\overline{E}$

b) expresia densității de sarcină ρ_s pe suprafața barei

c) capacitatea formată de cele două bare

---

a) Aproximăm liniile de câmp electric prin segmente de dreaptă de lungime „d” între planele de bază formate într-o secțiune $\perp$ pe bare

$$U = \int_1^2 \overline{E}\,\overline{d\ell} = E\int_1^2 d\ell = E\left(d + \frac{\pi}{2}x\right) \quad \rightarrow \quad E = \frac{U}{d + \frac{\pi}{2}x} \qquad (5.40)$$

şi prin arce de cerc cu raze x (x є (0,a)). Tensiunea între cele două bare este U indiferent în lungul cărei linii de câmp electric este calculată:

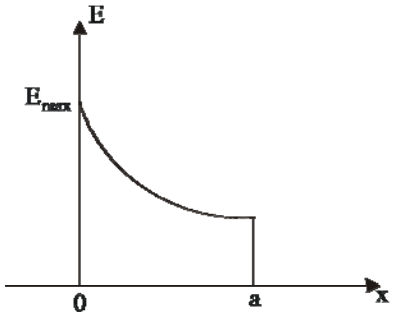


Fig 5.14

Cel mai intens câmp electric se obține pentru $x = 0$ (de fapt acolo unde este cea mai scurtă linie de câmp) .

b) Densitatea sarcinii pe suprafața barelor se obține pe baza relației (3.15) ca fiind:

$$\rho_S = D = \varepsilon_o E = \frac{\varepsilon_o U}{d + \frac{\pi}{2}x} \qquad (5.41)$$

deci maximă acolo unde şi câmpul electric este maxim (x=0).

c) Capacitatea dispozitivului o putem calcula „clasic” :

$$q = \int \rho_S ds = \int_0^a \frac{\varepsilon_o U}{d + \frac{\pi}{2}x}(\ell dx) = 2\,\frac{\varepsilon_o U \ell}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi a}{2d}\right) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad C = \frac{q}{U} = 2\frac{\varepsilon_o \ell}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi a}{2d}\right) \qquad (5.42)$$

sau, considerăm un tub de flux cu secțiunea $ds = \ell dx$ luat în lungimea liniilor de câmp. Capacitatea tubului este :

$$dC_{tub} = \frac{\varepsilon_o ds}{\ell} = \frac{\varepsilon_o (\ell dx)}{d + \frac{\pi}{2}x} \rightarrow C = \int_0^a \frac{\varepsilon_o \ell dx}{d + \frac{\pi}{2}x} = 2\frac{\varepsilon_o \ell}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi a}{2d}\right) \qquad (5.43)$$

Capacitatea totală este formată din două capacități de forma (5.43) şi formate între fețele de sus şi de jos ale dispozitivului din figura 5.13.

$$C_t = 2C = \frac{4\varepsilon_o \ell}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi a}{2d}\right) \qquad (5.44)$$

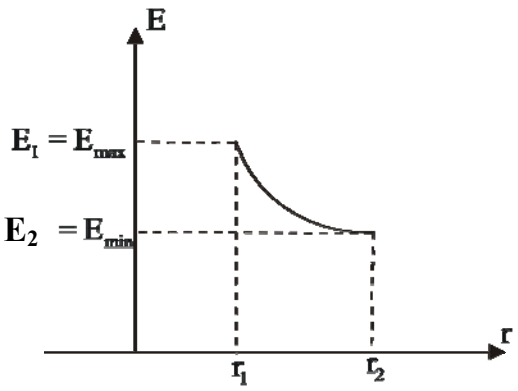


Fig 5.15

2. Un izolator cilindric este realizat din mai multe straturi concentrice separate prin foițe conductoare. Să se determine în ce condiții straturile de izolație vor fi uniform solicitate (același câmp $\overline{E}$), indiferent de poziția (raza) lor.

Pentru un condensator cilindric capaciatea are expresia (5.32) iar repartiția câmpului electric între armături este:

$$q = CU = \frac{2\pi\varepsilon\ell}{\ln\frac{r_2}{r_1}}U \rightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon\ell r} = \frac{U}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\cdot\frac{1}{r} \qquad (5.45)$$

Câmpul are valoare maximă lângă armătura interioară ($r = r_1$) şi minimă lângă cea exterioară ($r = r_2$) ca în figura 5.15.

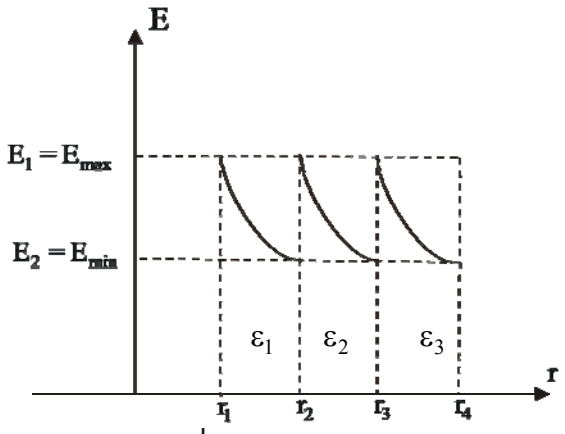


Fig 5.16

Pentru un condensator cilindric cu mai multe straturi se poate realiza solicitarea uniformă a acestor starturi (între aceleaşi limite $E_{max} - E_{min}$) indiferent de poziţia straturilor (figura 5.16).

a) dacă toate straturile au aceeaşi lungime $\ell_k = \ell = \text{const}$ atunci:

$$E_k = \frac{q}{2\pi\varepsilon_k\ell_k r_k} = \text{const} \qquad (5.46)$$

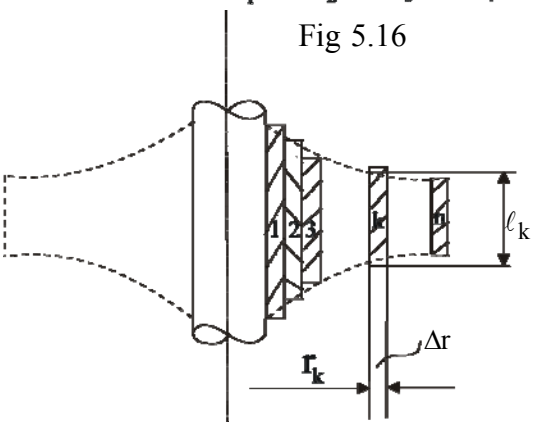


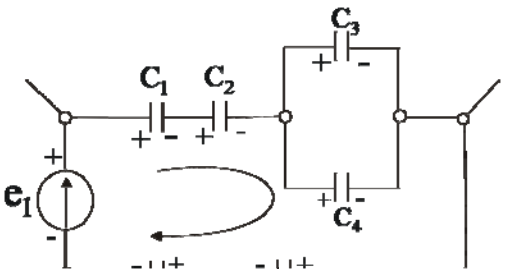
Fig 5.17

şi vom avea solicitare uniformă dacă $\varepsilon_k r_k = \text{const}$, deci straturile de lângă armătura interioară ($r_k = \text{mic}$) să aibă calităţi izolatoare mari ($\varepsilon_k = \text{mare}$) astfel ca $\varepsilon_k r_k = \text{const}$.

b) dacă însă toate straturile sunt realizate din acelaşi material $\varepsilon_k = \varepsilon = \text{const}$ şi sunt la fel de groase $\Delta r_k = \text{const} = \Delta r$, atunci pentru a realiza condiţia $E_k = \text{const}$ în fiecare strat (conform 5.46) trebuie ca: $\ell_k r_k = \text{const}$, respectiv , $\ell_k = \frac{\text{const}}{r_k}$ (5.47)

deci lungimea straturilor trebuie să aibă o variaţie hiperbolică cu raza acestora ca în figura 5.17.

3. Pentru o rețea oarecare de capacități aflate într-o anumită conexiune (figura 5.18) sarcina acumulată într-un nod este nulă ($q_{nod} = 0$) iar teorema potențialului electrostatic aplicată pe o curbă închisă Γ va fi:



$$e_\Gamma = \sum_{k\ \varepsilon\ ochi} u_k^{\pm}$$

În nodul (a)se scrie:

$$-q_2 + q_3 + q_4 = 0 \qquad (5.48)$$

Pe ochiul Γ avem:

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_5 + U_6 = e_1 \qquad (5.49)$$

Relații de forma (5.48) se scriu în (n–1) noduri iar de forma (5.49) pe $o = \ell - n + 1$ ochiuri independente. Condensatoarele în serie se încarcă cu aceeaşi sarcină ($q_1 = q_2$, $q_5 = q_6$) iar cele în paralel cu aceeaşi tensiune între armături ($U_3 = U_4$).

5.3 Relațiile lui Maxwell privitoare la capacități

Relațiile lui Maxwell privitoare la capacități (sau Mehrleitersysteme = sisteme cu mai multe conductoare) exprimă relațiile ce există între *sarcinile corpurilor conductoare* şi *potențialele acestora* (când avem un sistem de n corpuri conductoare încărcate şi aflate „în prezență" , respectiv se influențează reciproc) prin intermediul unor mărimi ce depind de geometria sistemului de corpuri şi de proprietățile electrice (ε) ale mediului dielectric ce le separă.

Cu aceste relații se pot determina sarcinile şi potențialele corpurilor din sistem fără a fi necesară cunoaşterea câmpului electric ce se stabileşte între corpuri. Dacă pentru un condensator avem: $q_1 = C(V_1 - V_2)$; $q_2 = C(V_2 - V_1)$, atunci pentru un sistem de n corpuri putem scrie :

$$\begin{cases} V_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{1n}q_n \\ V_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{2n}q_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_n = \alpha_{n1}q_1 + \alpha_{n2}q_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{nn}q_n \end{cases} \qquad (5.50)$$

Termenul ($\alpha_{11}q_1$) arată contribuția propriei sarcini la potențialul V_1 şi acest

6. Regimul magnetic staționar

Câmpul magnetic staționar este câmpul creat de magneți permanenți imobili şi de conductoare parcurse de curent continuu (sau de joasă frecvență) aflate în repaus. Studiul câmpului magnetic creat de curenții electrici constituie partea din teoria câmpului numită *electromagnetism*.

Ecuațiile câmpului magnetic staționar (cvasistaționar) derivă din expresiile legilor generale în care impunem restricțiile acestui regim:

medii imobile $\bar{v}=0$; mărimi invariabile în timp $\frac{\partial}{\partial t}=0$ ($\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}=0, \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}=0, \frac{\partial \rho_v}{\partial t}=0$) sau în regim cvasistaționar $\frac{\partial}{\partial t} << :$ ($\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} <<$).

- legea legăturii în câmp magnetic: $\bar{B}=\mu_o(\bar{H}+\bar{M})$ (6.1)
- legea magnetizației temporare: $\bar{M}_t=\chi_m \bar{H}$ (6.2)
- legea fluxului magnetic: $\Phi_\Sigma=\int_\Sigma \bar{B}\,\bar{ds}=0;\ \mathrm{div}\bar{B}=0 \leftrightarrow \bar{B}=\mathrm{rot}\bar{A}$ (6.3)
- legea circuitului magnetic: $\oint_\Gamma \bar{H}\,\bar{d\ell}=\theta_{S_\Gamma};\ \mathrm{rot}\,\bar{H}=\bar{J}$ (6.4)

Câmpul magnetic staționar se studiază indirect, se determină potențialul său magnetic vector $\bar{A}$ (etalonat cu o condiție de etalonare de tip Coulomb: $\mathrm{div}\bar{A}=0$) şi în final se revine la câmpul fizic: $\bar{B}=\mathrm{rot}\bar{A}$.

6.1 Potențialul magnetic vector $\bar{A}$ şi ecuațiile pe care le satisface

Din legea fluxului magnetic rezultă că $\mathrm{rot}\bar{A}=\bar{B}$ iar din condiția de etalonare a potențialului $\bar{A}$ rezultă că: $\mathrm{div}\bar{A}=0$, deci $\bar{A}$ este univoc determinat, fiind precizate atât rotorul cât şi divergența potențialului magnetic vector $\bar{A}$.

În medii neomogene $(\mu=\mu(r))$ dar fără magnetizație permanentă $\bar{M}_p=0$, putem scrie:

$$\mathrm{rot}\bar{H}=\mathrm{rot}(\nu\bar{B})=\bar{J}\ ;\ \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\bar{A})=\mathrm{grad}(\underbrace{\mathrm{div}\bar{A}}_{=0})-\Delta\bar{A}$$

$$\mathrm{rot}(\nu\ \mathrm{rot}\bar{A})=\nu\ \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\bar{A})+\mathrm{grad}\,\nu\times\mathrm{rot}\bar{A}=\bar{J}$$

Deci: $$\Delta\bar{A} - \frac{1}{v}(\nabla v \times \mathrm{rot}\bar{A}) = -\mu\bar{J} \qquad (6.5)$$

Ecuația (6.5) este o *ecuație cvasipoisson vectorială* având asociate condițiile de unicitate corespunzătoare:

- *condiții de material*: în orice punct din domeniu se cunoaşte $\mu(r)$ sau $v(r)$.
- *condiții la limită* pe frontiera Σ a domeniului de câmp υ_Σ : componenta tangențială a intensității câmpului magnetic $\bar{H}_{t_\Sigma}$ şi a potențialului $\bar{A}_{t_\Sigma}$.
- *ecuații de trecere* în jurul discontinuităților: $(A)_1 = (A)_2$.
- *condiții de surse*: distribuția curentului de conducție $\bar{J}$ în υ_Σ şi a mărimilor $\bar{M}_p$, $\bar{J}_S$ pe suprafețele de discontinuitate S_{12}.

În subdomenii de omogenitate ($v = \mathrm{ct} \rightarrow \mathrm{grad}\, v = 0$) ecuația (6.5) devine:

$$\Delta\bar{A} = -\mu\bar{J} \qquad (6.6)$$

care este o *ecuație Poisson vectorială* a cărei soluție este potențialul $\bar{A}$ din domenii interioare distribuțiilor de curent $\bar{J}$.

Pentru domenii din exteriorul conductoarelor parcurse de curent ($\bar{J} = 0$) rămâne:

$$\Delta\bar{A} = 0 \qquad (6.7)$$

care este o *ecuație Laplace vectorială*. Condițiile la limită asociate ecuațiilor (6.6) şi (6.7) pot fi:

- condiții Dirichlet: componenta tangențială a lui A: $A_{t_\Sigma} = f_D$ (sau 0); pentru zero este o condiție la limită *omogenă*.
- condiții Neumann: $\left.\frac{\partial A}{\partial n}\right|_\Sigma = \mu f_N$ (sau 0).

Ecuația Poisson vectorială (6.6) dacă o raportăm la un sistem cartezian de axe se poate descompune în trei ecuații Poisson scalare:

$$\Delta A_x = -\mu J_x ; \qquad \Delta A_y = -\mu J_y ; \qquad \Delta A_z = -\mu J_z \qquad (6.8)$$

Dacă avem un câmp magnetic staționar în domeniu plan (xOy), atunci ecuațiile liniilor de câmp $\bar{B}$ sunt aceleaşi cu ecuațiile A(x,y)=ct.

Soluțiile celor trei ecuații (6.8) pentru întregul spațiu υ_∞ se determină din problema interioară prin extinderea la infinit a suprafeței Σ, sursele câmpului magnetic sunt numai curenții electrici de conducție, iar

densitățile au astfel de variații în spațiu încât asigură convergența integralelor de volum:

$$A_x=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\upsilon_\infty}\frac{J_x(\bar r')}{R}d\upsilon';\ A_y=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\upsilon_\infty}\frac{J_y(\bar r')}{R}d\upsilon';\ A_z=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\upsilon_\infty}\frac{J_z(\bar r')}{R}d\upsilon' \tag{6.9}$$

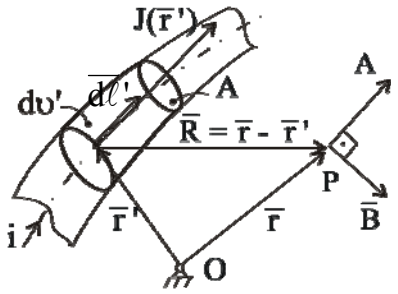


Fig 6.1

Expresii care pot fi reunite sub forma:

$$\bar A=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\upsilon_\infty}\frac{\bar J(\bar r')}{R}d\upsilon' \tag{6.10}$$

care reprezintă soluția ecuației Poisson (6.6) vectoriale. Integrala din (6.10) se poate restrânge doar la volumul conductorului parcurs de curent unde de fapt J≠0.

Dacă conductorul parcurs de curent este filiform ($\bar J \| \bar A \| d\bar\ell'$; $d\upsilon'=Ad\ell'$; $\bar J\,d\upsilon'=JAd\bar\ell'=i\,d\ell'$) cu notațiile din figura 6.1, atunci expresia potențialului $\bar A$ creat de curentul i concentrat în axa Γ a firului parcurs de curentul i devine de forma:

$$\bar A=\frac{\mu i}{4\pi}\oint_\Gamma\frac{d\bar\ell'}{R} \tag{6.11}$$

Dacă firul este de dimensiuni infinite, în (6.10) nu se mai poate admite că la ∞ potențialul şi câmpul sunt nule ($\bar A=0$) iar integrala din (6.10) devine improprie.

În general, când sursele câmpului sunt nu numai distribuții de volum ale curenților ($\bar J$) ci şi pânze de curent ($\bar J_s$) sau fire subțiri parcurse de curenții i_k , soluția pentru potențialul magnetic vector este de forma generală:

$$\bar A=\frac{\mu}{4\pi}\left[\int_{\upsilon_\infty}\frac{\bar J}{R}d\upsilon'+\int_S\frac{\bar J_s}{R}ds'+\sum_{k=1}^{n}i_k\oint_{\Gamma_k}\frac{d\bar\ell'}{R}\right] \tag{6.12}$$

Cunoscând expresia lui $\bar A$ pentru un conductor filiform plasat în mediu omogen (μ=ct), putem determina expresia inducției magnetice $\bar B$:

$$\bar B=\mathrm{rot}\,\bar A=\mathrm{rot}\left[\frac{\mu i}{4\pi}\oint_\Gamma\frac{d\bar\ell'}{R}\right] \tag{6.13}$$

$$\mathrm{rot}\frac{d\bar\ell'}{R}=\nabla\times\frac{d\bar\ell'}{R}=\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times d\bar\ell'=-\frac{\bar R}{R^3}\times d\bar\ell'=\frac{d\bar\ell'\times\bar R}{R^3}$$

$$\bar B_{fir}=\frac{\mu i}{4\pi}\oint_\Gamma\frac{d\bar\ell'\times\bar R}{R^3} \tag{6.14}$$

Expresia (6.14) este cunoscută şi sub numele de *teorema lui Biot-Savart-Laplace.*

Dacă conductorul parcurs de curent nu este filiform, soluția (6.14) rămâne de forma:

$$\bar{B} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\upsilon_{cond}} \frac{\bar{J}(\bar{r}')\times\bar{R}}{R^3}\,d\upsilon' \qquad (6.15)$$

Observație:

În medii omogene (μ=ct) şi fără densitate de curent ($\bar{J}=0$), respectiv studiem câmpul magnetic din exteriorul conductoarelor parcurse de curenți, ecuația satisfăcută de $\bar{A}$ este o ecuație Laplace de forma (6.7). Tot în acest caz se poate scrie:

$$\left.\begin{aligned} &\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J} = 0 \rightarrow \bar{H} = -\nabla V_H = -\text{grad}V_H \\ &\text{div}\,\bar{B} = \text{div}(\mu\bar{H}) = 0 \rightarrow \text{div}\bar{H} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta V_H = 0 \qquad (6.16)$$

unde V_H este *potențialul magnetic scalar* al câmpului $\bar{H}$. În astfel de probleme sau se integrează ecuația vectorială (6.7) sau cea scalară (6.16), fiecare în condiții la limită date. În final, fie $\bar{B}=\text{rot}\bar{A}$, fie $\bar{H} = -\text{grad}V_H$.

Aplicații:

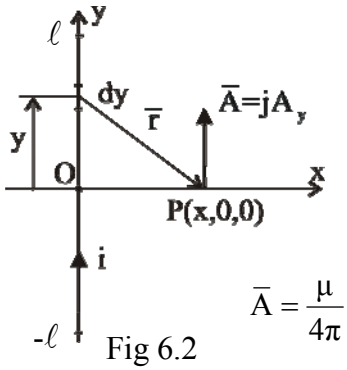


Fig 6.2

1) Să se determine potențialul vector $\bar{A}$ creat de un conductor rectiliniu parcurs de curentul i, respectiv de către două conductoare paralele parcurse de curentul i în sensuri opuse.

Potențialul vector $\bar{A}$ de forma (6.14) sau (6.15) nu are decât componenta A_y:

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\upsilon_{cond}} \frac{\bar{J}}{r}\,d\upsilon \rightarrow A_y = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{i}{r}dy = \frac{2\mu i}{4\pi}\int_0^{\ell}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (6.17)$$

$$A_y = \frac{\mu i}{2\pi}\left[\ln(\ell+\sqrt{x^2+y^2}) - \ln x\right] \qquad (6.18)$$

Dacă conductorul are lungime mare ($\ell >> x$), atunci expresia (6.18) devine:

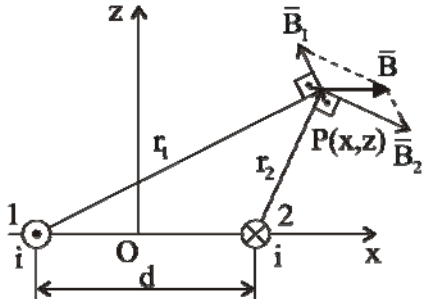


Fig 6.3

$$A_y \cong \frac{\mu i}{2\pi}(\ln 2\ell - \ln x) = \frac{\mu i}{2\pi}\ln\frac{2\ell}{x} \qquad (6.19)$$

Pentru două fire paralele parcurse de curentul i ca în figura 6.3 vom avea:

$$A_y = \frac{\mu i}{2\pi}\left(\ln\frac{2\ell}{r_1} - \ln\frac{2\ell}{r_2}\right) = \frac{\mu i}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} \qquad (6.20)$$

unde:

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{\left(x+\dfrac{d}{2}\right)^2 + z^2} \\ \dfrac{\partial r_1}{\partial x} = \dfrac{x+\dfrac{d}{2}}{r_1^2} \\ \dfrac{\partial r_1}{\partial z} = \dfrac{z}{r_1^2} \end{cases}; \quad \begin{cases} r_2 = \sqrt{\left(x-\dfrac{d}{2}\right)^2 + z^2} \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial x} = \dfrac{x-\dfrac{d}{2}}{r_2^2} \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial z} = \dfrac{z}{r_2^2} \end{cases};$$

Componentele inducției magnetice într-un punct curent P(x,z) ca în figura 6.3 sunt:

$$\begin{cases} B_x = \text{rot}_x \overline{A} = \dfrac{\partial A_y}{\partial z} = -\dfrac{\mu i}{2\pi}\left(\dfrac{z}{r_1^2} - \dfrac{z}{r_2^2}\right) = f_1(x,z) \\ B_y = \text{rot}_y \overline{A} = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} = \dfrac{\mu i}{2\pi}\left[\dfrac{x+\dfrac{d}{2}}{r_1^2} - \dfrac{x-\dfrac{d}{2}}{r_2^2}\right] = f_2(x,z) \\ \overline{B} = B_x \overline{i} + B_y \overline{j} \end{cases} \qquad (6.21)$$

2) Să se determine expresia potențialului $\overline{A}$ creat de un conductor tubular cu raza interioară a şi exterioară b, parcurs uniform de curentul i.

Conductorul orientat în lungul axei Oz va avea densitatea de curent: $J_z = \dfrac{i}{\pi(b^2 - a^2)}$, iar potențialul $\overline{A}=A_z\overline{k}$ are doar componenta A_z soluție a ecuației Poisson: $\Delta A_z = -\mu_o J_z$, care în coordonate cilindrice devine:

$$\Delta A_z = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_z}{dr}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dA_z}{dr} = \frac{-1}{2}\mu_o J_z r + \frac{C_1}{r} \rightarrow A_z = \frac{-1}{4}\mu_o J_z r^2 + C_1 \ln r + C_2 \qquad (6.22)$$

Admitem că A_z=0 pentru r=a şi în acest caz:

$$C_2 = -\frac{1}{4}\mu_o J_z a^2 - C_1 \ln a \rightarrow A_z = \frac{1}{4}\mu_o J_z\left(r^2 - a^2\right) + C_1 \ln\frac{r}{a} \qquad (6.23)$$

Din compunerea celor două expresii pentru potențialul $\overline{A}$ şi câmpul $\overline{B}$, rezultă:

$$\left.\begin{aligned}\bar{B}_\varphi &= \nabla\times\bar{A} = -\frac{dA_z}{dr}\bar{u}_\varphi = \left(-\frac{1}{2}\mu_o J_z r + \frac{C_1}{r}\right)\bar{u}_\varphi \\ \bar{B}_\varphi &= \frac{\mu_o i}{2\pi r}\bar{u}_\varphi = \frac{\mu_o J_z}{2\pi r}\pi\left(r^2-a^2\right)\bar{u}_\varphi\end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}\mu_o J_z\left(2r^2-a^2\right)$$

Expresia finală a potențialului magnetic vector va fi de forma:

$$A_z = \frac{1}{4}\mu_o J_z r^2 + \frac{1}{2}\mu_o J_z\left(2r^2-a^2\right)\ln\frac{r}{a} - \frac{1}{4}\mu_o J_z a^2 - C_1 \ln a \qquad (6.24)$$

6.2 Potențialul magnetic $\bar{A}$ şi câmpul $\bar{B}$ creat de fire rectilinii parcurse de curent

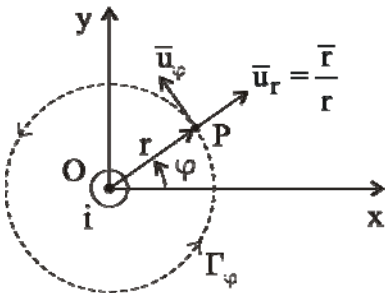


Fig 6.4

Considerăm un fir rectiliniu lung dirijat după axa Oz parcurs de curentul i.

Față de un sistem cilindric de coordonate (figura 6.4) vectorul $\bar{A}$ este paralel cu $\bar{J}$, respectiv cu firul, va avea doar componenta $\bar{A} = A_z\bar{u}_z = A\bar{u}_z$. Liniile câmpului $\bar{B}$ fiind $\perp$ pe $\bar{A}$ vor fi cercuri conținute în planul xOy (câmp plan-paralel).

$$\Delta\bar{A} = 0 \rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) = 0 \rightarrow r\frac{\partial A}{\partial r} = C_1 \rightarrow A = C_1\ln r + C_2$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{B} &= \mathrm{rot}\bar{A} = \nabla\times\left(A\bar{u}_z\right) = -\bar{u}_z\times\nabla A = -\bar{u}_z\times\bar{u}_r\frac{C_1}{r} = -\frac{C_1}{r}\bar{u}_\varphi \\ \bar{B} &= \frac{\mu_o i}{2\pi r}\bar{u}_\varphi\end{aligned}\right. \Rightarrow C_1 = -\frac{\mu_o i}{2\pi}$$

Considerăm originea de potențial arbitrară: A=0 pentru $r=r_o \rightarrow C_2 = \frac{\mu_o i}{2\pi}\ln r_o$, respectiv:

$$\bar{A} = \bar{k}\frac{\mu_o i}{2\pi}\ln\frac{r_o}{r} \qquad (6.25)$$

Se observă că liniile de câmp sunt cercuri având r=ct, ceea ce implică A=cst, ecuația liniilor de câmp $\bar{B}$ corespunde ecuației $A(r) = ct$.

Observație:

Expresia 6.25 pentru potențialul $\bar{A}$ creat de un fir parcurs de curentul i este asemănătoare cu cea a potențialului electric V creat de acelaşi fir încărcat cu ρ_ℓ (originea de potențial V este la distanța r_o de fir):

$$V=\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{r_o}{r} \tag{6.26}$$

Asemănarea celor două soluții provine din faptul că cele două potențiale satisfac ecuații Poisson asemănătoare şi au aceeaşi geometrie:

$$\Delta\bar{A}=-\mu_o\bar{J} \quad ; \quad \Delta V=\frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{6.27}$$

Pentru o linie bifilară potențialul $\bar{A}$ are expresia:

$$\bar{A}=\bar{k}\frac{\mu_o i}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Locul geometric al punctelor $A=\text{cst}\leftrightarrow\ln\frac{r_2}{r_1}=\text{cst}$, respeciv o familie de cercuri de tip Appolonius, care vor fi liniile câmpului magnetic $\bar{B}$ creat de cele două fire ale liniei.

Pentru un conductor cilindric de rază a, parcurs de curentul i, soluția este de forma (6.22) valabilă atât în interiorul cât şi în exteriorul conductorului.

$$\begin{cases}\text{pt. interior: } r\in(0,a);\ J\neq 0\rightarrow A_i=-\frac{1}{4}\mu_o J r^2+C_1\ln r+C_2\\ \text{pt. exterior: } r>a;\ J=0\rightarrow A_e=C_1'\ln r+C_2'\end{cases} \tag{6.28}$$

În centrul conductorului ($r=0$) potențialul A_i este finit, deci C_1=0 şi cum în centrul conductorului $B_i=0$ admitem că şi $A_i=0$; deci pentru $r=0\rightarrow C_2=0$,

respectiv în interior:

$$A_i=-\frac{1}{4}\mu_o J r^2\rightarrow B_i=-\frac{dA_i}{dr}=\frac{1}{2}\mu_o J r\ ;\quad \bar{B}_i=B_i\bar{u}_\varphi \tag{6.29}$$

Deci pentru un conductor de rază a, originea lui $\bar{A}$ este pe axă, spre deosebire de firul fără grosime la care originea se alege arbitrar la r=r_o sau $r_o=1\,\text{m}$.

Pe domeniul exterior se poate scrie:

$$\bar{B}_e=\text{rot}_\varphi\bar{A}_e=-\frac{dA_e}{dr}\bar{u}_\varphi=-\frac{C_1'}{r}\bar{u}_\varphi \tag{6.30}$$

Din continuitatea potențialului şi câmpului pe suprafața de separație (r=a) se deduc constantele de integrare ($\bar{A}$, la fel ca V, trebuie să fie funcție continuă, altfel $\bar{B} = \mathrm{rot}\bar{A}$ va fi infinit în punctele sale de discontinuitate).

$$\left(A_e\right)_{r=a} = \left(A_i\right)_{r=a} \leftrightarrow -\frac{1}{4}\mu_o\left(\frac{i}{\pi a^2}\right)a^2 = C_1'\ln a + C_2' = -\frac{\mu_o i}{4\pi}$$

$$\left(B_e\right)_{r=a} = \left(B_i\right)_{r=a} \leftrightarrow \frac{\mu_o i}{2\pi a} = -\frac{C_1'}{a}$$

$$C_1' = -\frac{\mu_o i}{2\pi}\ ;\ C_2' = \frac{\mu_o i}{2\pi}\left(\ln a - \frac{1}{2}\right) \rightarrow A_e = \frac{\mu_o i}{2\pi}\left(\ln\frac{a}{r} - \frac{1}{2}\right) \qquad (6.31)$$

iar dacă conductorul are $\mu \neq \mu_o$ atunci:

$$A_e = \frac{i}{2\pi}\left(\mu_o \ln\frac{a}{r} - \frac{\mu}{2}\right) \qquad (6.32)$$

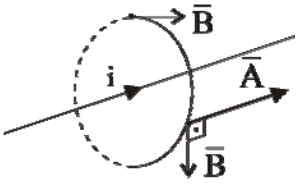


Fig 6.6

Dacă în (6.25) admitem că $r_o = 1\ \mathrm{m}$, atunci:

$$A = \frac{\mu i}{2\pi}\ln\frac{1}{r} \qquad (6.33)$$

iar ca vector potențialul $\bar{A}$ este paralel cu firul (figura 6.6).

6.3. Metoda imaginilor magnetice

Presupunem o spiră Γ parcursă de curentul i situată într-un mediu heterogen format din două subdomenii de permeabilități μ_1 şi μ_2 separate prin planul xOy ca în figura 6.7.

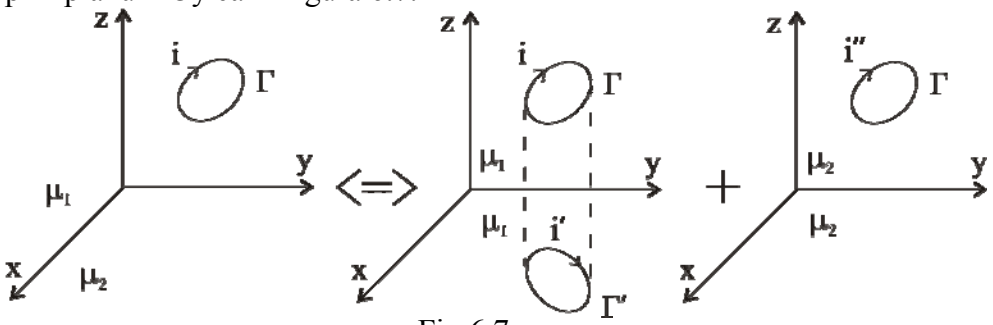


Fig 6.7

Problema „neomogenă” o descompunem în două subprobleme omogene. Presupunem mediul cu μ_1 infinit extins în care alături de spira Γ parcursă de i va mai acționa spira Γ' (imaginea lui Γ în raport cu planul

xOy) care va produce în semispațiul superior (z>0) un potențial $\bar{A}_i'$ asemănător cum Γ produce $\bar{A}_i$ în semispațiul inferior (z<0).

$$\bar{A}_i'(x,y,z) = \frac{i'}{i}\bar{A}_i(x,y,-z) \tag{6.34}$$

Notăm $\frac{i'}{i} = a$ şi $\bar{A}_1 = \bar{A}_i + \bar{A}_i'$ potențialul magnetic în prima subproblemă unde acționează i şi i′ şi ale cărui componente sunt:

$$\begin{cases} A_{1x} = A_{ix} + aA_{ix} = (1+a)A_{ix} \\ A_{1y} = A_{iy} + aA_{iy} = (1+a)A_{iy} \\ A_{1z} = A_{iz} - aA_{iz} = (1-a)A_{iz} \end{cases} \tag{6.35}$$

În a doua subproblemă din figura 6.7 am extins peste tot mediul cu μ_2 iar prin curba Γ trece curentul imagine i″. Prin analogie cu cazul precedent, potențialul magnetic vector creat de i″ în semispațiul inferior (z<0), este de forma:

$$\bar{A}_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{i''}{i}\bar{A}_i = b\frac{\mu_2}{\mu_1}\bar{A}_i \tag{6.36}$$

Valorile lui a şi b se determină din condițiile de continuitate pe suprafața S_{12} (z=0):

$$\begin{cases} B_{n_1} = B_{n_2} \rightarrow B_{1z} = B_{2z} \\ H_{t_1} = H_{t_2} \rightarrow \begin{cases} H_{1x} = H_{2x} \leftrightarrow \dfrac{B_{1x}}{\mu_1} = \dfrac{B_{2x}}{\mu_2} \\ H_{1y} = H_{2y} \leftrightarrow \dfrac{B_{1y}}{\mu_1} = \dfrac{B_{2y}}{\mu_2} \end{cases} \end{cases} \tag{6.37}$$

Dar cum $\bar{B} = \mathrm{rot}\bar{A}$ rezultă:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \;;\; B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \;;\; B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{6.38}$$

Atunci din prima condiție (6.37) rezultă:

$$(1+a)\left(\frac{\partial A_{iy}}{\partial x} - \frac{\partial A_{ix}}{\partial y}\right) = \frac{\mu_2}{\mu_1}b\left(\frac{\partial A_{iy}}{\partial x} - \frac{\partial A_{ix}}{\partial y}\right) \rightarrow 1 + a = \frac{\mu_2}{\mu_1}b$$

iar din ultimele două ecuații (6.37) rezultă: $1 - a = b$, respectiv:

$$a = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \;;\; b = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \tag{6.39}$$

Cunoscând a şi b, se pot determina curenţii imagine: $i' = ai\,;\ i'' = bi$.

Un caz particular este atunci când S_{12} separă un mediu feromagnetic nesaturat ($\mu_2 = \mu_{Fe} \approx \infty$) faţă de aer (vid) cu $\mu_1 = \mu_o$ iar spira Γ este un fir paralel cu suprafaţa feromagnetului. În acest caz: $a = 1\,;\ b = 0$, respectiv $i' = i$ (cei doi curenţi au aceeaşi valoare şi sens) iar $i'' = 0$.

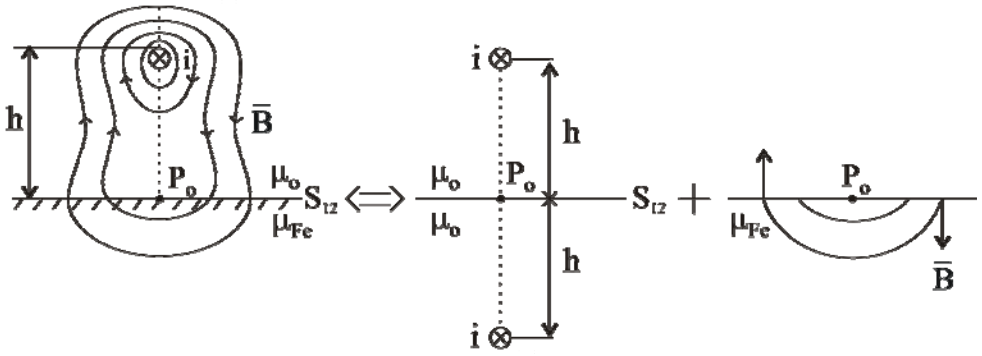


Fig 6.8

În prima subproblemă din figura 6.8 cei doi curenţi identici i aşezaţi în mediu omogen cu μ_o creează potenţialul vector:

$$\bar{A}_1 = \bar{k}\frac{\mu_o i}{2\pi}\left(\ln\frac{h}{r_1} + \ln\frac{h}{r_2}\right) = \bar{k}\frac{\mu_o i}{2\pi}\ln\frac{h^2}{r_1 r_2} \qquad (6.40)$$

dacă am considerat originea de potenţial în punctul P_o din figura 6.8.

În a doua subproblemă presupunem că $\mu_2 >>$ (dar mediul este liniar):

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{div}\bar{B}_2 = 0 \\ &\mathrm{rot}\bar{B}_2 = \mathrm{rot}\left(\mu_2\bar{H}_2\right) = \mu_2\underbrace{\mathrm{rot}\bar{H}_2}_{\bar{J}_2=0} + \underbrace{\nabla\mu_2}_{=0}\times\bar{H}_2 = 0 \rightarrow \bar{B}_2 = -\nabla V_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta V_2 = 0 \qquad (6.41)$$

în mediul cu μ_2 câmpul $\bar{B}_2$ este Laplacian, liniile sale sunt cercuri cu centrul în P_o, ele sunt $\perp$ pe suprafaţa S_{12} care este o suprafaţă echipotenţială.

Suprapunând câmpul din cele două subprobleme rezultă câmpul aşa cum este desenat în problema iniţială din figura 6.8.

Dacă interesează doar câmpul $\bar{H}$, atunci în mediul cu $\mu_2 >> \rightarrow H_2 \approx 0$ şi nu există decât prima subproblemă respectiv $\bar{H} = \bar{H}_1$ ca în figura 6.9.

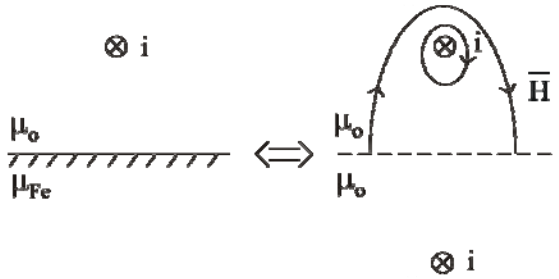


Fig 6.9

6.4 Circuite magnetice

Un *circuit magnetic* este un ansamblu de piese feromagnetice (cu $\mu_r >>$), eventual separate prin porțiuni de aer, care servesc la închiderea liniilor de flux magnetic. Liniile lui $\bar{B}$ sunt conduse prin corpuri feromagnetice (tangente la fața interioară a corpului) la fel cum trec liniile lui $\bar{J}$ prin piese conductoare.

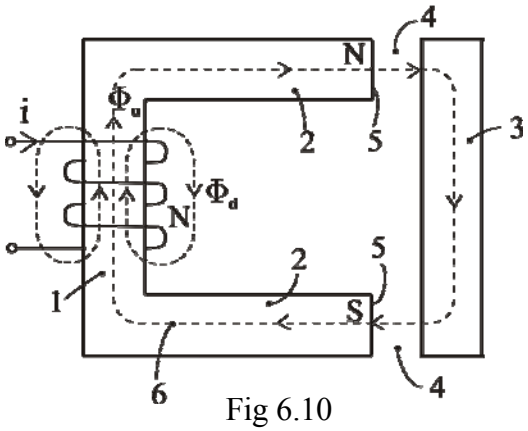


Fig 6.10

Pentru circuitul magnetic din figura 6.10 se definesc noțiunile:

1. *coloană* – partea din circuitul magnetic pe care este aşezată bobina cu N spire.
2. *jug magnetic* – partea de circuit magnetic nebobinată, care serveşte numai pentru a uşura închiderea liniilor de flux magnetic.
3. *armătură* – o parte din jugul magnetic care se poate mişca.
4. *întrefieruri* – porțiuni cu aer care separă porțiuni cu fier.
5. *poli* – fețele miezului care mărginesc întrefierul: pol nord (N) acolo unde liniile de câmp ies din miez în aer şi pol sud (S) acolo unde liniile intră în miez.

6. linia mijlocie de flux – fluxul magnetic creat de bobina cu N spire parcurse de curentul i are două componente: $\Phi = \Phi_u + \Phi_d$; *fluxul util* Φ_u se închide de-alungul întregului circuit magnetic şi dacă miezul este filiform, el este uniform repartizat pe secțiunea miezului şi-l putem considera concentrat în *linia mijlocie de flux* (axa geometrică a miezului). Cealaltă componentă Φ_d - *fluxul magnetic de dispersie* se închide doar în jurul bobinei şi nu se ia în considerare la studiul circuitelor magnetice.

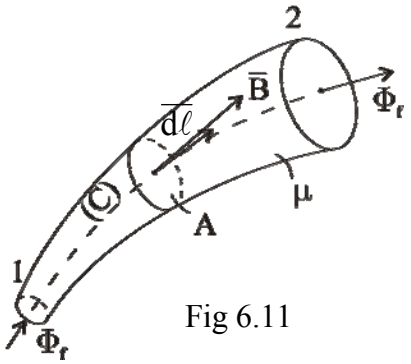


Fig 6.11

În figura 6.11 este reprezentat un *tub de flux magnetic* dintr-un circuit magnetic de permeabilitate μ, parcurs de fluxul fascicular Φ_f uniform repartizat pe secțiunea A şi concentrat în axa tubului (curba C) respectiv: $\overline{H} \parallel \overline{B} \parallel \overline{d\ell}$. *Tensiunea magnetică* între capetele 1 şi 2 ale tubului este:

$$U_m = \int_{1(C)}^{2} \overline{H}\,\overline{d\ell} = \int_1^2 H d\ell = \int_1^2 \frac{B}{\mu} d\ell = \int_1^2 \frac{\Phi_f}{\mu A} d\ell = \Phi_f \int_1^2 \frac{d\ell}{\mu A} = R_m \Phi_f \tag{6.42}$$

Mărimea $R_{m_{12}} = \int_1^2 \frac{d\ell}{\mu A}$ este *reluctanța* (rezistența magnetică) a tubului de flux iar dacă materialul este liniar, (6.42) se scrie sub forma:

$$U_m = R_m \Phi_f \tag{6.43}$$

numită *legea lui Ohm* pentru o porțiune de circuit magnetic, analoagă cu forma $u = Ri$ din circuitele electrice.

Dacă miezul este omogen ($\mu = cst$), de secțiune constantă ($A = ct$) şi de lungime ℓ atunci reluctanța este:

$$R_m = \int_1^2 \frac{d\ell}{\mu A} = \frac{1}{\mu A}\int d\ell = \frac{\ell}{\mu A}\ ; \quad [R_m] = \frac{[U_m]}{[\Phi_f]} = \frac{Asp}{Wb} = H^{-1} \tag{6.44}$$

Inversul reluctanței se numeşte *permeanță*:

$$\Lambda_m = \frac{1}{R_m} = \frac{\Phi_f}{U_m} = \frac{\mu A}{\ell}\ ;\ \Lambda_m = \int_{S_{Fe}} \frac{\mu ds}{\ell} \tag{6.45}$$

Calculul reluctanței şi permeanței cu (6.44) şi (6.45) se poate efectua şi pentru miezuri neomogene cu o geometrie oarecare utilizând *metoda tuburilor şi feliilor* de miez magnetic.

Tuburile de flux sunt de secțiune infinitezimală ds şi sunt luate în lungul liniilor de flux Φ_f; $\ell = \ell_{tub}$ fiind lungimea tubului (o funcție).

$$d\Lambda_{m_{tub}} = \frac{\mu ds}{\ell_{tub}} \rightarrow \Lambda_m = \int d\Lambda_m = \int_{S_{miez}} \frac{\mu ds}{\ell} \tag{6.46}$$

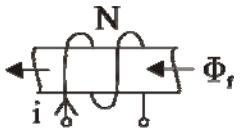
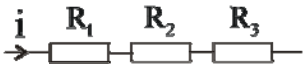
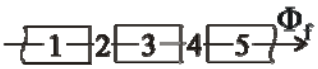
sau: $\Lambda_m = \sum_1^n \frac{\mu_k \Delta S_k}{\ell_k}$ pentru tuburi mai groase, avându-se în vedere că tuburile sunt parcurse de flux în conexiune paralel.

Feliile de flux au grosime infinitezimală $d\ell$ şi sunt $\perp$ pe liniile de flux, diversele felii sunt parcurse în serie de către fluxul magnetic:

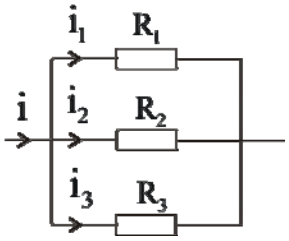
$$dR_{m_{felie}} = \frac{d\ell}{\mu S_{felie}} \rightarrow R_m = \int dR_m = \int_{linie\ flux} \frac{d\ell}{\mu S} \qquad (6.47)$$

sau: $R_m = \sum_1^n \frac{\Delta\ell_k}{\mu_k S_k}$ pentru felii mai groase (am considerat n felii).

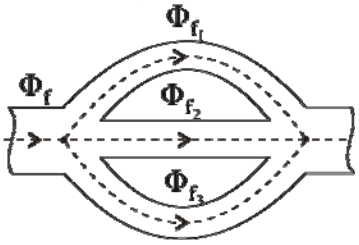
Bazat pe izomorfismul relațiilor (6.43)-(6.47) cu relațiile scrise pentru piese conductoare parcurse de curent se poate construi o analogie între circuitele electrice şi circuitele magnetice, sub forma:

Circuite electrice (fără cuplaje)		*Circuite magnetice*
	$e^V \leftrightarrow \theta^A = Ni$	
e - t.e.m. a surselor este cauza funcționării (producerea lui i) în circuite electrice		θ=Ni - solenația bobinelor, face să existe flux magnetic prin miezuri (*cauza funcționării*).
	$i^A \leftrightarrow \Phi_f^{Wb}$	- *efectul* în circuite electrice este circulația de curenți iar în circuitele magnetice circulația de fluxuri fasciculare prin miezuri
	$R \leftrightarrow R_m$	- *opoziția* circuitului
	$G=\frac{1}{R} \leftrightarrow \Lambda_m=\frac{1}{R_m}$	
	$R_e=\sum R_k \leftrightarrow R_{m_e}=\sum R_{m_k}$	
 circuit electric serie		 circuit magnetic serie

$G_e = \sum G_k \quad \leftrightarrow \quad \Lambda_{m_e} = \sum \Lambda_{m_k}$



circuit electric paralel



circuit magnetic paralel

$i_{cond} = \int_{S_{cond}} \overline{J}\,\overline{ds} \qquad \overline{J} \quad \leftrightarrow \quad \overline{B} \qquad \Phi_{f_{miez}} = \int_{S_{miez}} \overline{B}\,\overline{ds}$

$\overline{J}$ - densitate de curent

$\overline{B}$ -densitate de flux (inducție magnetică)

liniile lui $\overline{J}$ - *linii de curent*

liniile lui $\overline{B}$ - *linii de flux magnetic*

T1K: $\sum_{k\in nod} i_k = 0 \quad \leftrightarrow \quad \sum_{k\in nod} \Phi_{f_k} = 0$; T1K

T2K: $\sum_{k\in ochi} R_k i_k = \sum_{k\in ochi} e_k \quad \leftrightarrow \quad \sum_{k\in ochi} R_{m_k} \Phi_{f_k} = \sum_{k\in ochi} \theta_k$; T2K

$R = \int_{linie\overline{J}} \frac{d\ell}{\sigma A} \quad \leftrightarrow \quad R_m = \int_{linie\overline{B}} \frac{d\ell}{\mu A}$

$R = \frac{\rho \ell}{A} = \frac{\ell}{\sigma A} \quad \leftrightarrow \quad R_m = \frac{\ell}{\mu A}$

$\frac{1}{\rho} = \sigma \quad \leftrightarrow \quad \mu = \frac{1}{\nu}$

$G = \int_{S_{cond}} \frac{\sigma ds}{\ell} \quad \leftrightarrow \quad \Lambda_m = \int_{S_{miez}} \frac{\mu ds}{\ell}$

nod $\leftrightarrow$ nod

ochi $\leftrightarrow$ ochi

Pe baza acestei analogii teoremele şi metodele utilizate la studiul circuitelor electrice rămân valabile şi pentru studiul circuitelor magnetice (mai puțin teoremele de conservare a puterilor electrice care nu au corespondent magnetic).

Analogia {*circuit electric* $\leftrightarrow$ *circuit magnetic*} este pur formală, cele două clase de probleme diferă esențial între ele. Printr-o latură de circuit electric nu circulă curent dacă latura este întreruptă; printr-o latură de circuit

magnetic va circula flux chiar dacă latura are un întrefier (miezul este întrerupt). Bineînțeles că fluxul printr-o latură cu întrefier este foarte mic din cauza reluctanței mari a porțiunii cu întrefier:

$$R_{m_{Fe}} = \frac{\ell_{Fe}}{\mu_{Fe} A} \; ; \; R_{m_o} = \frac{\ell_o}{\mu_o A} \; ; \; \mu_{Fe} >> \mu_o \rightarrow R_{m_o} >> R_{m_{Fe}} \qquad (6.48)$$

O rezistență electrică R parcursă de curent este însoțită de transformarea energiei electrice în căldură însă o reluctanță (un miez magnetic) parcurs de fluxul Φ_f nu este însoțită de dezvoltări de căldură (dacă totuşi un miez se încălzeşte, asta se întâmplă din cauza altor efecte, atunci când fluxul Φ_f este variabil în timp: încălziri prin histerezis sau prin curenți turbionari induşi în miez, dar nu din cauza conducerii fluxului magnetic).

6.4.1 Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice

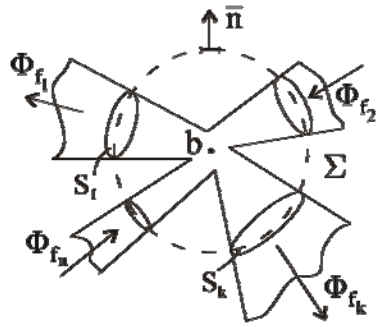


Fig 6.12

Conform legii fluxului magnetic, fluxul magnetic printr-o suprafață închisă Σ este întotdeauna nul:

$$\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \overline{B}\ \overline{ds} = 0$$

Alegând o suprafață Σ care înconjoară un nod b de circuit magnetic (figura 6.12) va exista flux doar prin suprafețele S_1, S_2...S_n din Σ şi putem scrie că:

$$\Phi_\Sigma = \sum_{k \in b} \Phi_{f_k} = 0 \qquad (6.49)$$

în suma algebrică (6.49) se consideră cu (+) fluxurile orientate după normala exterioară la Σ, deci cele care ies din nod.

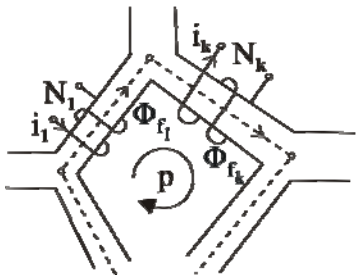


Fig 6.13

Considerăm ochiul p dintr-un circuit magnetic (figura 6.13) care este format din mai multe laturi cu reluctanțele R_{m_1}, R_{m_2} ... R_{m_k}, cele care sunt active au solenațiile $\theta_1 = N_1 i_1$, $\theta_2 = N_2 i_2$, ... $\theta_k = N_k i_k$ iar prin laturi trec fluxurile fasciculare Φ_{f_1} , Φ_{f_2} , ... Φ_{f_k} .

Legea circuitului magnetic în regim staționar (cvasistaționar) sau teorema lui Ampère aplicată pe o curbă Γ în lungul ochiului p se scrie astfel:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}\,\overline{d\ell} = \theta_{S_\Gamma} \leftrightarrow \begin{cases} \oint_{\Gamma} \overline{H}\,\overline{d\ell} = \sum_{k\in p} \int_{C_k} \overline{H}_k\,\overline{d\ell}_k = \sum u_{m_k} = \sum R_{m_k}\Phi_{f_k} \\ \theta_{S_\Gamma} = \sum_{k\in p} \theta_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k\in p} R_{m_k}\Phi_{f_k} = \sum_{k\in p} \theta_k \end{cases} \qquad (6.50)$$

Expresia (6.50) reprezintă T2K pentru circuite magnetice analoagă cu $\sum \underline{Z}_k \underline{I}_k = \sum \underline{E}_k$ pentru circuite electrice fără cuplaje sau $\sum R_k I_k = \sum E_k$ în circuite de c.c.

În (6.50) se consideră că au solenație doar laturile active (au o bobină cu N spire parcurse de curentul i) şi sensul solenației depinde de sensul curentului prin bobină şi de sensul de înfăşurare a spirelor pe miez.

Dacă ținem seama şi de dispersia magnetică, vom considera fluxul fascicular de dispersie ca fluxul unei noi laturi de circuit magnetic legată în derivație între punctele de început şi sfârşit ale acestui flux. Reluctanța acestor laturi corespunzătoare fluxului de dispersie se poate evalua doar aproximativ sau se măsoară experimental. În probleme obişnuite aceste fluxuri de dispersie se neglijează în raport cu fluxurile utile, ele închizându-se doar prin aer vor avea valori foarte mici.

6.4.2 Rezolvarea circuitelor magnetice

A „rezolva" un circuit magnetic înseamnă a determina *fluxul magnetic fascicular* Φ_f , inducția magnetică $\overline{B}$ şi intensitatea câmpului magnetic $\overline{H}$ prin fiecare porțiune a circuitului magnetic atunci când se cunoaşte geometria miezului, permeabilitatea sa μ şi solenațiile θ=Ni ale diverselor bobine ale circuitului .

Calculul se face neglijând fluxurile magnetice de dispersie iar fluxurile utile se consideră uniform repartizate pe secțiunea miezului (miez filiform).

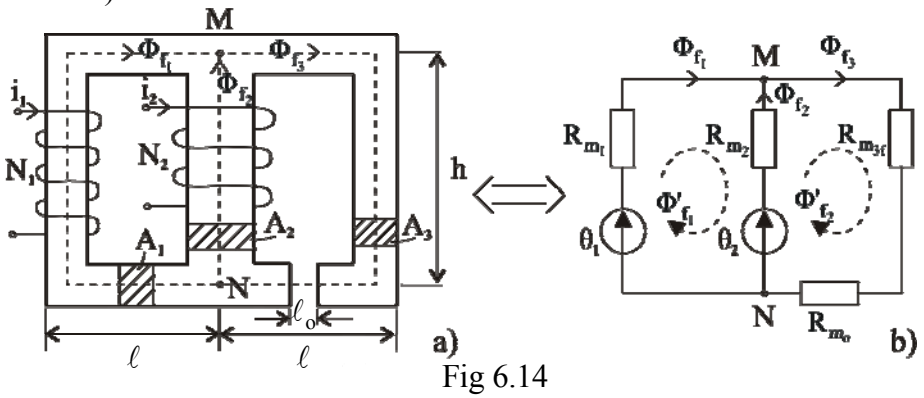


Fig 6.14

Presupunem circuitul magnetic cu geometria din figura 6.14-a care are două noduri (M şi N) şi trei laturi. Lungimile laturilor se evaluează de-alungul liniei mijlocii de flux de la nodul M la N iar secțiunile laturilor sunt A_1, A_2, A_3.

Reluctanțele laturilor de miez (şi a întrefierului) sunt:

$$R_{m_1}=\frac{2\ell+h}{\mu A_1}\ ;\ R_{m_2}=\frac{h}{\mu A_2}\ ;\ R_{m_{3f}}=\frac{2\ell+h-\ell_o}{\mu A_3}\ ;\ R_{m_o}=\frac{\ell_o}{\mu_o A_3} \quad (6.51)$$

iar solenațiile sunt: $\theta_1=N_1i_1$ şi $\theta_2=N_2i_2$.

Pe baza analogiei dintre circuitele electrice şi cele magnetice s-a desenat în figura 6.14-b circuitul electric echivalent cu aceeaşi topologie ca şi cel magnetic iar mărimile care-l caracterizează au valorile calculate anterior.

→ Determinarea fluxurilor fasciculare se poate face aplicând TK pe circuitul echivalent:

$$\begin{cases}\Phi_{f_1}+\Phi_{f_2}-\Phi_{f_3}=0\\ R_{m_1}\Phi_{f_1}-R_{m_2}\Phi_{f_2}=\theta_1-\theta_2\\ R_{m_2}\Phi_{f_2}+\left(R_{m_{3f}}+R_{m_o}\right)\Phi_{f_3}=\theta_2\end{cases}\rightarrow\begin{bmatrix}\Phi_{f_1}\\ \Phi_{f_2}\\ \Phi_{f_3}\end{bmatrix}\xrightarrow[B_k=\frac{\Phi_{f_k}}{A_k}]{}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ B_3\end{bmatrix}\xrightarrow[H_k=\frac{B_k}{\mu}]{}\begin{bmatrix}H_1\\ H_2\\ H_3\end{bmatrix} \quad (6.52)$$

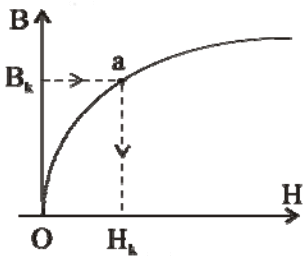


Fig 6.15

Dacă miezul îl considerăm liniar atunci $B_k=\mu H_k$ iar dacă îl considerăm neliniar atunci caracteristica miezului B(H) are aspectul din figura 6.15. La o valoare $B_k=\frac{\Phi_{f_k}}{A_k}$ a inducției magnetice îi corespunde o valoare H_k a intensității câmpului şi dacă punctul de funcționare este în (a), permeabilitatea acelui punct este $\mu=\frac{B_k}{H_k}$ respectiv $\mu_r=\frac{\mu}{\mu_o}\approx 10^5-10^6$ este permeabilitatea relativă în punctul (a) de funcționare. Şi circuitul electric echivalent este tot neliniar în acest caz.

Intensitatea câmpului magnetic în întrefierul de lungime ℓ_o are valoarea $H_o=\frac{B_3}{\mu_o}$.

→ Cu metoda fluxurilor ciclice (Φ'_{f_1},Φ'_{f_2}) pentru circuitul electric analog avem:

$$\begin{cases}\left(R_{m_1}+R_{m_2}\right)\Phi'_{f_1}-R_{m_2}\Phi'_{f_2}=\theta_1-\theta_2\\ -R_{m_2}\Phi'_{f_1}+\left(R_{m_2}+R_{m_{3f}}+R_{m_o}\right)\Phi'_{f_2}=\theta_2\end{cases}\rightarrow\begin{bmatrix}\Phi'_{f_1}\\ \Phi'_{f_2}\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}\Phi_{f_1}=\Phi'_{f_1}\\ \Phi_{f_2}=-\Phi'_{f_1}+\Phi'_{f_2}\\ \Phi_{f_3}=\Phi'_{f_2}\end{cases}\rightarrow\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ B_3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}H_1\\ H_2\\ H_3\\ H_o\end{bmatrix}\qquad(6.53)$$

→ Cu metoda potențialeleor nodurilor, luând nodul N referință vom scrie o singură ecuație pentru nodul M: $\Lambda_{m_M}\cdot V_{m_M}=\Phi_{sc_M}$, respectiv:

$$\left(\frac{1}{R_{m_1}}+\frac{1}{R_{m_2}}+\frac{1}{R_{m_{3f}}+R_{m_o}}\right)V_{m_M}=\frac{\theta_1}{R_{m_1}}+\frac{\theta_2}{R_{m_2}}\rightarrow V_{m_M}\rightarrow$$

$$\rightarrow\Phi_{f_1}=\frac{\theta_1-V_{m_M}}{R_{m_1}}\ ;\ \Phi_{f_2}=\frac{\theta_2-V_{m_M}}{R_{m_2}}\ ;\ \Phi_{f_3}=\frac{V_{m_M}}{R_{m_{3f}}+R_{m_o}}\qquad(6.54)$$

În exemplul considerat în figura 6.14 fluxul fascicular Φ_{f_3} va fi mic din cauza reluctanței mari a întrefierului (R_{m_o} >>).

Circuite magnetice cu magnet permanent

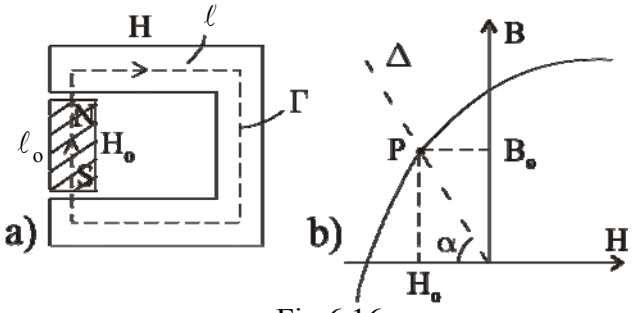


Fig 6.16

Circuitul magnetic din figura 6.16-a conține un magnet permanent de lungime ℓ_o care determină flux magnetic de-alungul miezului.

Curba Γ are lungimea ℓ_o prin magnet şi ℓ prin miez şi aplicând legea circuitului magnetic pentru curba Γ, putem scrie:

$$\oint_\Gamma \overline{H}\ \overline{d\ell}=0\leftrightarrow H_o\ell_o+H\ell=0\rightarrow H_o=-H\frac{\ell}{\ell_o}\rightarrow B_o=\mu_o H_o=\underbrace{-\mu_o\frac{\ell}{\ell_o}}_{tg\alpha}H\qquad(6.55)$$

Dreapta de sarcină Δ din figura 6.16-b are panta $tg\alpha=\mu_o\frac{\ell}{\ell_o}$ iar la intersecția sa cu curba de demagnetizare se stabileşte punctul de funcționare

P al magnetului permanent. În magnet valorile câmpului sunt B_o şi H_o. În interiorul miezului valorile câmpului sunt:

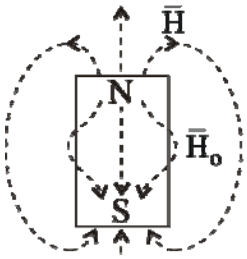


Fig 6.17

$$B = B_o \;\; ; \;\; H = \frac{B}{\mu} \; .$$

Spectrul câmpului $\bar{H}$ pentru magnetul tip bară din figura 6.17 pune în evidență cum se închid liniile lui $\bar{H} = \bar{H}_{ext}$ şi $\bar{H}_o = \bar{H}_{int}$.

6.5 Inductivități

Inductivitatea (inductanța) unei spire Γ parcursă de curentul i_Γ este o mărime ce caracterizează circuitul Γ şi se defineşte ca raportul dintre fluxul magnetic ce străbate suprafața circuitului (Φ_{S_Γ}) şi valoarea curentului care a produs acest flux:

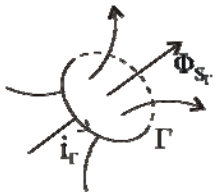


Fig 6.18

$$L = \frac{\Phi_{S_\Gamma}}{i_\Gamma} = f\left(\text{geom. circ} \; ; \; \mu_{mediu}\right) \; ; \; \left[L\right] = \frac{Wb}{A} = H \qquad (6.56)$$

$$\left[H\right] \rightarrow \text{Henry}$$

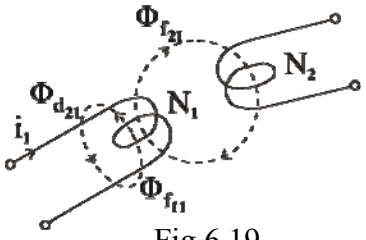


Fig 6.19

În medii liniare $\mu = \mu_{mediu} = cst$ inductivitatea depinde doar de geometria circuitului (forma curbei Γ) şi de permeabilitatea din jurul său.

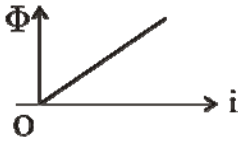
Dacă avem două circuite cu N_1 şi N_2 spire aflate „în prezență" (se influențează reciproc), atunci când circuitul 1 este parcurs de curentul i_1 el va crea un câmp magnetic; $\Phi_{f_{11}}$ este fluxul magnetic fascicular creat de i_1. O parte din acest flux va trece şi prin spirele N_2 ale circuitului al doilea ($\Phi_{f_{21}}$ - este creat de circuitul 1 şi trece prin suprafața circuitului 2). Celelalte linii de câmp care nu trec şi prin circuitul 2 reprezintă fluxul de dispersie (scăpări) ale circuitului 1 față de 2 ($\Phi_{d_{21}}$). Sensul de referință a fiecărui flux magnetic se consideră după regula burghiului drept cu sensul de referință al curentului care l-a produs. Deci $\Phi_{f_{11}} > 0$ iar $\Phi_{f_{21}}$ este (+) dacă are acelaşi sens cu fluxul propriu al circuitului

2 (cuplaj adiţional) şi (-) când are sens contrar cu $\Phi_{f_{22}}$ (cuplaj diferenţial între cele două circuite). În raport cu aceste fluxuri se definesc următoarele inductivităţi:

a) Inductivitatea proprie a unui circuit este raportul dintre fluxul magnetic total ($\Phi = N\Phi_f$) prin cele N spire ale circuitului şi curentul care l-a produs, mărime întotdeauna pozitivă.

$$\begin{cases} L_1 = L_{11} = \dfrac{\Phi_{11}}{i_1} = \dfrac{N_1\Phi_{f_{11}}}{i_1} > 0 \\ L_2 = L_{22} = \dfrac{\Phi_{22}}{i_2} = \dfrac{N_2\Phi_{f_{22}}}{i_2} > 0 \end{cases} \tag{6.57}$$

Inductivitatea (inductanţa) proprie a unui circuit mai are şi alte denumiri: coeficient de inducţie proprie, coeficient de autoinducţie, coeficient de selfinducţie. Numele de *inductanţă* apare în cărţi mai vechi preluate din literatura franceză.



În medii liniare L=ct şi „fluxurile magnetice sunt proporţionale cu valorile curenţilor care le-au produs” (teorema inductivităţii).

b) Inductivitatea mutuală L_{21} dintre circuitul 1 şi 2 se defineşte ca raportul dintre fluxul total Φ_{21} prin cele N_2 spire ($\Phi_{21} = N_2\Phi_{f_{21}}$) şi curentul i_1 care l-a creat.

$$L_{21}^{\pm} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{N_2\Phi_{f_{21}}^{\pm}}{i_1} \tag{6.58}$$

Inductivitatea mutuală (coeficient de inducţie mutuală) într-un mediu liniar depinde de natura mediului din jurul circuitului (μ), de dimensiunile, forma şi poziţia relativă a celor două circuite.

În mod analog se defineşte:

$$L_{12}^{\pm} = \frac{\Phi_{12}}{i_2} = \frac{N_1\Phi_{f_{12}}^{\pm}}{i_2} \text{ dacă } i_1 = 0 \text{ şi } i_2 \neq 0 \tag{6.59}$$

Vom arăta (în alt capitol) că $L_{12}=L_{21}$ – teorema reciprocităţii pentru inductivităţi.

c) Inductivităţi utile şi de dispersie

O parte din fluxul fascicular propriu produs de circuitul 1 ajunge să treacă şi prin suprafaţa circuitului 2, numit *flux fascicular util.* Cealaltă parte care se închide doar în jurul circuitului 1 care l-a produs se numeşte *flux fascicular de dispersie* (de scăpări) şi valoarea sa este:

$$\Phi_{fd_{21}} = \Phi_{f_{11}} - \left|\Phi_{f_{21}}\right| > 0$$

Inductivitatea de dispersie a circuitului 1 față de 2 este:

$$\begin{cases} L_{d_{21}} = \dfrac{N_1\Phi_{fd_{21}}}{i_1} = \dfrac{N_1\Phi_{f_{11}}}{i_1} - N_1\dfrac{\left|\Phi_{f_{21}}\right|}{i_1} = L_{11} - \dfrac{N_1}{N_2}\left|L_{21}\right| > 0 \\ L_{d_{12}} = L_{22} - \dfrac{N_2}{N_1}\left|L_{21}\right| \end{cases} \quad (6.60)$$

Dar inductivitatea proprie a circuitului 1 aflat în prezența circuitului 2 este:

$$L_{11} = L_{d_{21}} + \frac{N_1}{N_2}\left|L_{21}\right| = L_{d_{21}} + L_{u_{21}} \quad (6.61)$$

unde $L_{u_{21}} = \dfrac{N_1}{N_2}\left|L_{21}\right|$ este *inductivitatea utilă* a circuitului 1 față de 2 şi analog $L_{u_{12}} = \dfrac{N_2}{N_1}\left|L_{21}\right|$.

Coeficientul de cuplaj magnetic dintre două bobine se defineşte prin:

$$k = \sqrt{\frac{L_{12}L_{21}}{L_{11}L_{22}}} = \frac{\left|L_{12}\right|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} = \frac{M_{12}}{\sqrt{L_1L_2}} \quad (6.62)$$

Bobine necuplate magnetic: $L_{12} = 0 \rightarrow k = 0$ iar cuplaj perfect (fără dispersii) înseamnă k=1 ($L_{12}^2 = L_1L_2$).

Coeficientul de dispersie magnetică a două bobine este:

$$\sigma^2 = 1 - k^2 = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1L_2} \quad (6.63)$$

- bobine necuplate: k=0; σ=1 – dispersie maximă
- bobine cuplate perfect: k=1; σ=0 – dispersie nulă.

6.5.1 Relațiile lui Maxwell privitoare la inductivități

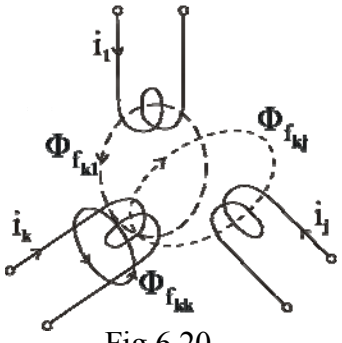


Fig 6.20

Considerăm un sistem de n circuite aflate în prezență pentru care se cunosc inductivitățile lor proprii: L_{11}, L_{22} … L_{nn} , inductivitățile mutuale $L_{kj}=L_{jk}$ şi curenții care le parcurg $i_1, i_2 \ldots i_n$.

Fluxul magnetic prin circuitul k, din sistem, este superpoziția dintre fluxul său propriu total $\Phi_{kk} = L_{kk}i_k$ şi fluxurile mutuale

care vin prin suprafața circuitului k din celelalte circuite cu care este cuplat. Fluxul total al circuitului j prin suprafața circuitului k este: $\Phi_{kj} = N_k \Phi_{f_{kj}} = L_{kj} i_{ij}$.

Fluxul total prin circuitul k este superpoziția tuturor fluxurilor (proprii şi mutuale) care trec prin suprafața sa:

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{kj} = \sum_{1}^{n} L_{kj} i_j \qquad j=\overline{1,n} \tag{6.64}$$

Explicit, dacă $i_1, i_2 \ldots i_n$ sunt curenții din cele n circuite (figura 6.20) atunci fluxurile magnetice totale prin suprafețele lor se pot scrie detaliind relația (6.64):

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 + \ldots + L_{1n} i_n \\ \Phi_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 + \ldots + L_{2n} i_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_n = L_{n1} i_1 + L_{n2} i_2 + \ldots + L_{nn} i_n \end{cases} \tag{6.65}$$

Coeficienții de pe diagonala principală sunt inductivitățile proprii ale celor n circuite iar coeficienții nediagonali sunt inductivitățile de cuplaj dintre circuite. Cum $L_{jk} = L_{kj}$ sistemul (6.65) este simetric față de diagonala principală.

Sistemul (6.65) se poate scrie matricial sub forma:

$$\underset{n\times 1}{[\Phi]} = \underset{n\times n}{[L]} \cdot \underset{n\times 1}{[i]} \tag{6.66}$$

care reprezintă forma matricială a relațiilor lui Maxwell pentru inductivități. Dacă în matricea $[L]$ un coeficient $L_{mn}=0$ înseamnă că bobina m nu este cuplată cu bobina n.

Dacă rezolvăm ecuația matricială (6.66) şi notăm $[\Gamma] = [L]^{-1}$ matricea *inductivităților reciproce*, atunci:

$$[i] = [\Gamma] \cdot [\Phi] \tag{6.67}$$

reprezintă a doua formă a relațiilor lui Maxwell pentru inductivități. Evident că $\Gamma_{kj} \neq \frac{1}{L_{kj}}$, Γ_{kj} este ceea ce rezultă din inversarea matricei $[L]$.

6.5.2 Legătura dintre inductivități şi t.e.m. induse

Dacă circuitele din figura 6.20 sunt rigide, nu au piese (miezuri) mobile, atunci toate inductivitățile sunt constante. Fluxul total prin circuitul

k poate fi variabil în timp $\Phi_k(t)$ numai atunci când curenții sunt variabili în timp.

T.e.m. e_k indusă la bornele circuitului k de către $\Phi_k(t)$ este de forma:

$$e_k = -\frac{d\Phi_k}{dt} = -L_{k1}\frac{di_1}{dt} - L_{k2}\frac{di_2}{dt} - ... - L_{kk}\frac{di_k}{dt} - ... - L_{kn}\frac{di_n}{dt} \qquad (6.68)$$

Notăm:

$e_{kk} = -L_{kk}\frac{di_k}{dt}$ - *t.e.m de inducție proprie* (t.e.m autoindusă). Ea apare în circuitul k datorită variației în timp a propriului său curent ($\frac{di_k}{dt} \neq 0$).

$e_{kj} = -L_{kj}\frac{di_j}{dt}$ - *t.e.m de inducție mutuală.* Ea se induce în circuitul k datorită variației în timp a curentului din circuitul j cu care circuitul k este cuplat.

Dacă un circuit nu este fix în spațiu (se poate mişca, roti sau se deplasează un miez magnetic în interiorul său), atunci şi inductivitatea sa va fi variabilă L=L(t) iar fluxul total al circuitului: $\Phi(t) = L(t)\cdot i(t)$.

T.e.m indusă în circuit va fi de forma:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} - i\frac{dL}{dt} \qquad (6.69)$$

unde:

$e_t = -L\frac{di}{dt}$ - t.e.m *indusă prin transformare* (static), care în funcție de câmpul magnetic inductor avea expresia: $e_t = \int_{S_\Gamma} -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\overline{ds}$.

$e_m = -i\frac{dL}{dt}$ - t.e.m *indusă prin mişcare* (dinamic), care în limbaj de câmp avea expresia: $e_m = \oint_\Gamma (\bar{v}\times\bar{B})\overline{d\ell}$.

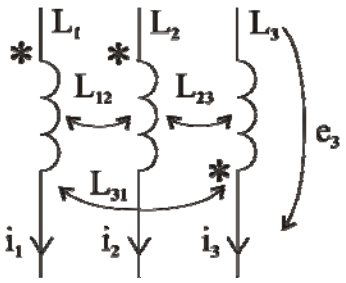


Fig 6.21

Dacă există mai multe bobine cuplate, parcurse de curenți variabili şi ținem seama de semnele cuplajelor: $L_{12}>0$; $L_{23}<0$; $L_{31}<0$ atunci t.e.m indusă la bornele bobinei L_3 va fi de forma:

$$e_3 = L_3\frac{di_3}{dt} - L_{23}\frac{di_2}{dt} - L_{31}\frac{di_1}{dt} \qquad (6.70)$$

Observaţie:

Pentru fire (circuite) foarte subţiri, câmpul magnetic lângă fir este foarte mare ($H \to \infty$), deci $\Phi \to \infty$ şi $L = \Phi/i \to \infty$, inductivitatea prin definiţia clasică nu are sens. Pentru fire groase, curba Γ care defineşte suprafaţa circuitului nu mai coincide cu axa geometrică a firului, deci inductivitatea L ar depinde de modul cum aleg curba Γ, deci nu are semnificaţie. Definiţia $L = \Phi/i$ este doar pentru circuite nici prea subţiri, nici prea groase. Energia magnetică $W_m = \frac{1}{2}\Phi i = \frac{1}{2}Li^2$ conţine termeni ce depind de alegerea curbei Γ (Φ şi L) dar şi termeni riguroşi:

$$W_m = \int_{\upsilon_\infty} \frac{1}{2}\mu H^2 d\upsilon \; ; \quad i = \int_{S_{cond}} \bar{J}\,\overline{ds}$$

şi-n acest caz *definiţia energetică a inductivităţii* este cea corectă:

$$L = \frac{2W_m}{i^2} = \frac{2W_{int}}{i^2} + \frac{2W_{ext}}{i^2} = L_{int} + L_{ext}$$

6.5.3 Teorema lui Neumann

Această teoremă permite să calculăm inductivitatea mutuală între două circuite care ocupă în spaţiu forma curbelor Γ_1 şi Γ_2 şi sunt aşezate într-un mediu omogen cu permeabilitatea μ.

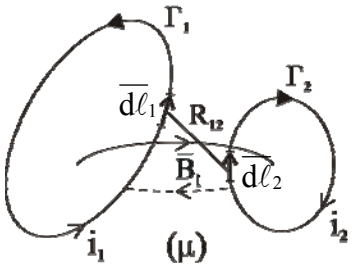


Fig 6.22

Circuitul Γ_1, parcurs de curentul i_1, creează în jurul său câmpul $\bar{B}_1$ care va da naştere prin suprafaţa circuitului 2 la fluxul de cuplaj:

$$\Phi_{21} = \int_{S_{\Gamma_2}} \bar{B}_1 \overline{ds} = \int_{S_{\Gamma_2}} \mathrm{rot}\,\bar{A}_1 \overline{ds} = \oint_{\Gamma_2} \bar{A}_1 \overline{d\ell_2} \qquad (6.71)$$

Potenţialul magnetic vector $\bar{A}_1$ creat de circuitul 1 în punctele de pe curba Γ_2 este de forma (6.11) şi fluxul mutual devine:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu i_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{\overline{d\ell_1} \cdot \overline{d\ell_2}}{R_{12}} \to L_{12} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{\overline{d\ell_1} \cdot \overline{d\ell_2}}{R_{12}} \qquad (6.72)$$

unde R_{12} (vezi figura 6.22) este distanţa dintre elementele $\overline{d\ell_1}$ şi $\overline{d\ell_2}$ a celor două circuite, ambele având orientarea celor doi curenţi i_1 şi i_2.

Dacă cele două circuite (Γ_1 şi Γ_2) sunt formate fiecare din porţiuni mai simple (analitice), relaţia (6.72) permite să calculăm *inductivitatea mutuală de calcul* între două porţiuni deschise de circuit ($\Gamma_1 = \bigcup_{k=1}^{n} C_{1k}$; $\Gamma_2 = \bigcup_{j=1}^{m} C_{2j}$), sub forma:

$$L_{21} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu}{4\pi}\int_{C_{1k}}\int_{C_{2j}}\frac{\overline{d\ell}_{1k}\cdot\overline{d\ell}_{2j}}{R_{12}} \qquad (6.73)$$

Dacă două porțiuni de circuit sunt dispuse ortogonal în spațiu $\overline{d\ell}_1 \perp \overline{d\ell}_2$ atunci $\overline{d\ell}_1\cdot\overline{d\ell}_2 = 0$ şi între porțiunile respective nu există inductivitate mutuală.

Când dorim ca două componente dintr-un aparat să nu se perturbe prin influență mutuală, ele se dispun perpendicular. Liniile de înaltă tensiune trec întotdeauna $\perp$ peste liniile de joasă tensiune, peste liniile de telecomunicații sau peste şinele de cale ferată, pentru a nu induce în acestea t.e.m care ar putea deveni periculoase.

Ca să putem determina L_{12} cu (6.72) trebuie ca cele două circuite să nu se intersecteze (atingă); dacă au un punct comun, acolo $R_{12} = 0$ şi L_{12} nu are sens în acest caz.

Aplicație:

Să se determine inductivitatea mutuală de calcul între două segmente de lungime a, situate la distanța d (figura 6.23).

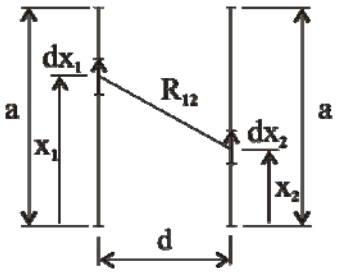


Fig 6.23

Cu (6.73) putem scrie succesiv:

$$L_{aa} = \frac{\mu}{4\pi}\int_o^a\int_o^a\frac{dx_1dx_2}{\sqrt{d^2+(x_1-x_2)^2}} =$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\int_o^a \ln\frac{a-x_2+\sqrt{d^2+(a-x_2)^2}}{-x_2+\sqrt{d^2+x_2^2}}dx_2 = \frac{\mu a}{2\pi}\left[\ln\frac{\sqrt{d^2+a^2}+a}{d} - \frac{\sqrt{d^2+a^2}-d}{a}\right]$$

Dacă a>>d atunci: (6.74)

$$L_{aa} \cong \frac{\mu a}{2\pi}\left(\ln\frac{2a}{d} - 1\right);$$

6.5.4 Metode de calcul a inductivităților

a) metode directe de calcul

Dacă avem un sistem de n circuite aflate în prezență şi se cunoaşte geometria circuitelor (forma, dimensiunea, poziția reciprocă), curenții din circuite $i_1, i_2 \ldots i_n$ şi proprietățile mediului din jur, atunci:

- se presupune circuitul (bobina) k parcursă de curentul i_k;
- se calculează inducția $\overline{B}_k$ creată de i_k (posibil pentru configurații simple);
- se calculează fluxul prin suprafața circuitului k şi prin suprafața circuitului j şi apoi inductivitățile:

$$\begin{cases} \Phi_{f_k} = \int_{S_k} \overline{B}_k \overline{ds} \rightarrow \Phi_k = N_k \Phi_{f_k} \rightarrow L_k = L_{kk} = \dfrac{N_k \Phi_{f_k}}{i_k} \\ \Phi_{f_{jk}} = \int_{S_j} \overline{B}_k \overline{ds} \rightarrow \Phi_{jk} = N_j \Phi_{f_{jk}} \rightarrow L_{jk} = \dfrac{N_j \Phi_{f_{jk}}}{i_k} \end{cases} \quad (6.75)$$

b) calculul inductivităților plasate pe miezuri magnetice

Dacă bobina este aşezată pe un miez magnetic (şi toate bobinele din joasă şi medie frecvență sunt cu miez magnetic) atunci:

- se calculează reluctanța echivalentă a miezului prin care bobina produce flux (în raport cu capetele bobinei) R_m.
- inductivitatea bobinei va fi de forma:

$$L = \frac{N\Phi_f}{i} = \frac{N}{i} \cdot \frac{\theta}{R_m} = \frac{N}{i} \cdot \frac{Ni}{R_m} = \frac{N^2}{R_m} = N^2 \Lambda_m \quad (6.76)$$

c) calculul cu ajutorul energiei magnetice

Energia magnetică înmagazinată în câmpul magnetic al unei bobine este:

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2 \rightarrow L = \frac{2W_m}{i^2} \quad (6.77)$$

aplicabilă mai ales pentru inductivitatea interioară a unui circuit: $L_{int} = \dfrac{2W_{int}}{i^2}$.

d) calculul inductivității mutuale cu teorema lui Neumann

Am văzut că se poate determina inductivitatea mutuală dintre două circuite cu (6.72) sau cea de calcul între două porțiuni de circuite (6.73) dacă acestea sunt aşezate în mediu omogen ($\mu = cst$) şi nu se intersectează.

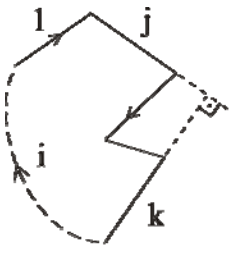


Fig 6.24

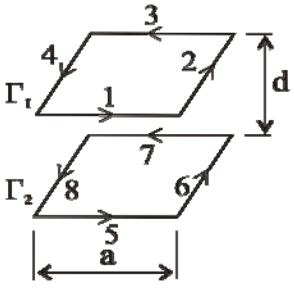


Fig 6.25

Dacă segmentul j din circuit este $\perp$ pe segmentul k (figura 6.24) atunci $L_{kj} = 0$.

Dacă avem două circuite Γ_1 şi Γ_2 de forma a două spire pătrate cu latura a, situate paralel pe aceeaşi axă la distanța d (figura

6.25) în mediu omogen cu μ, ne propunem să determinăm inductivitatea mutuală dintre ele.

Inductivitatea de calcul între două segmente paralele L_{aa} este de forma (6.74) şi în această categorie intră: $L_{15} = L_{37} = L_{26} = L_{48} = L_{aa}$ iar dacă în (6.74) se înlocuieşte d prin $\sqrt{d^2 + a^2}$ se obține valoarea L'_{aa^*}: $L_{17} = L_{28} = L_{35} = L_{46} = L'_{aa^*}$.

Pentru segmente $\perp$ inductivitatea mutuală este nulă:

$$L_{16} = L_{18} = L_{25} = L_{27} = L_{36} = L_{38} = L_{45} = L_{47} = 0.$$

Sumând inductivitățile mutuale de calcul pentru cele două spire Γ_1 şi Γ_2 din figura 6.25, inductivitatea mutuală dintre ele este:

$$L_{\Gamma_1\Gamma_2} = \sum_{j=1}^{4}\sum_{k=5}^{8} \pm L_{jk} = 4L_{aa} - 4L'_{aa^*} =$$

$$= \frac{2\mu_o a}{\pi}\left[\ln\frac{\sqrt{d^2+a^2}\left(\sqrt{d^2+a^2}+a\right)}{d\left(\sqrt{d^2+2a^2}+a\right)} + \frac{\sqrt{d^2+2a^2} - 2\sqrt{d^2+a^2} + d}{a}\right] \qquad (6.78)$$

6.6 Aplicații

1) Să se determine inductivitatea unui solenoid (bobină cilindrică cu N spire a căror secțiune este A iar lungimea bobinei ℓ, dacă ℓ este mult mai mare decât diametrul spirei).

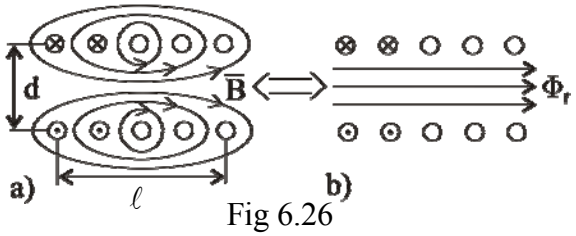


Fig 6.26

Pentru o bobină scurtă (figura 6.26a) fluxul magnetic este diferit prin fiecare spiră, cel mai mare este prin spirele centrale. Fluxul magnetic total este $\Phi_t = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots$.

Dacă $\ell/d >> 1$ bobina reală o putem privi ca un solenoid (figura 6.26b) la care există câmp magnetic doar în interiorul bobinei şi este un câmp uniform (cu liniile paralele), prin toate spirele avem acelaşi flux (valoarea medie a fluxurilor din bobina reală) numit *flux fascicular* Φ_f.

În acest caz fluxul magnetic total este $\Phi_t = N\Phi_f$. Neglijând câmpul magnetic exterior, cu teorema lui Ampère determinăm H iar apoi L:

$$B = \mu H = \mu \frac{Ni}{\ell} \rightarrow \Phi_f = B \cdot A \rightarrow L = \frac{N\Phi_f}{i} = \mu \frac{N^2 iA}{\ell} \qquad (6.79)$$

2) Două bobine cu N_1 şi N_3 spire sunt aşezate pe un miez magnetic de permeabilitate μ şi geometria din figura 6.27. Să se determine inductivităţile proprii L_{11}, L_{33} şi inductivitatea mutuală dintre ele $L_{13} = L_{31}$.

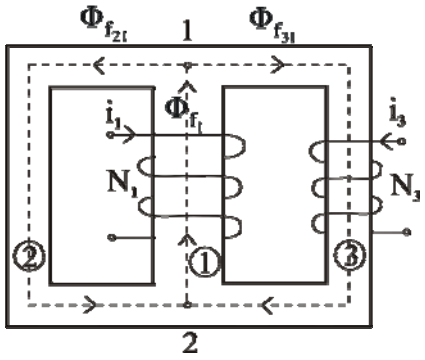


Fig 6.27

Bobinele fiind aşezate pe miez magnetic vom determina inductivităţile cu (6.76). Inductivitatea bobinei 1 este: $L_1 = L_{11} = \frac{N_1^2}{R_{me_1}}$, unde R_{me_1} este reluctanţa echivalentă prin care stabileşte flux bobina 1 dacă ar acţiona singură:

$$R_{me_1} = R_{m_1} + \frac{R_{m_2} R_{m_3}}{R_{m_2} + R_{m_3}} \qquad (6.80)$$

Inductivitatea bobinei 3 se scrie analog:

$$L_3 = L_{33} = \frac{N_3^2}{R_{me_3}} \;\; ; \;\; R_{me_3} = R_{m_3} + \frac{R_{m_1} \cdot R_{m_2}}{R_{m_1} + R_{m_2}} \qquad (6.81)$$

Bobina 1 parcursă de curentul i_1 produce fluxul fascicular Φ_{f_1} care în nodul 1 se ramifică în $\Phi_{f_{21}}$ şi $\Phi_{f_{31}}$; aplicând regula divizorului de flux (analog cu regula divizorului de curent) se scrie succesiv:

$$\Phi_{f_1} = \frac{N_1 i_1}{R_{me_1}} \; ; \; \Phi_{f_{31}} = \Phi_{f_1} \cdot \frac{R_{m_2}}{R_{m_2} + R_{m_3}} \; ; \; L_{13} = L_{31} = \frac{N_3 \Phi_{f_{31}}}{i_1} = \frac{N_1 N_3}{R_{me_1}} \frac{R_{m_2}}{R_{m_2} + R_{m_3}} \qquad (6.82)$$

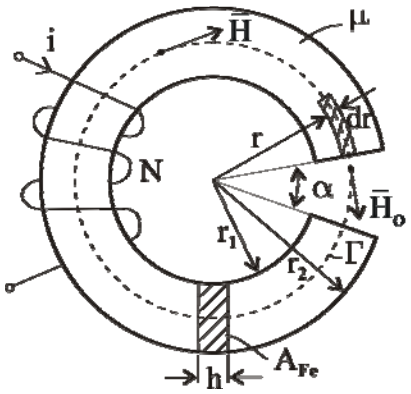


Fig 6.28

3) O bobină cu N spire este aşezată pe un miez magnetic toroidal cu secţiune dreptunghiulară $A_{Fe} = h\,(r_2 - r_1)$ şi permeabilitate μ având un întrefier cu o deschidere la centru α. Să se determine inductivitatea bobinei.

a) prin metode directe de calcul (6.75) înseamnă:

- liniile de câmp $\bar{H}$ sunt cercuri în

lungul miezului; fie o linie de câmp Γ (cerc de rază $r \in (r_1, r_2)$):

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}\ \overline{d\ell} = \theta_{S_\Gamma} \leftrightarrow H\ell + H_o \ell_o = Ni \leftrightarrow H(2\pi - \alpha)r + H_o \alpha r = Ni \quad (6.83')$$

▪ la trecerea liniilor de câmp $\overline{B}$ din fier în aer se conservă componenta normală a lui $\overline{B}$:

$$B_{Fe} = B_{aer} \leftrightarrow \mu H = \mu_o H_o \quad (6.83'')$$

Din ecuațiile (6.83') şi (6.83") rezultă:

$$H = \frac{Ni}{(2\pi - \alpha) + \mu_r \alpha} \cdot \frac{1}{r} = \frac{k_1}{r} \quad (6.84)$$

Fluxul fascicular de-alungul miezului este de forma:

$$\Phi_f = \int_{A_{Fe}} B\ ds = \int_{r_1}^{r_2} (\mu H)\, h\ dr = \mu \frac{Nih}{(2\pi - \alpha) + \mu_r \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6.85)$$

Expresia inductivității rezultă din relația sa de definiție:

$$L = \frac{N\Phi_f}{i} = \mu \frac{N^2 h}{(2\pi - \alpha) + \mu_r \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6.86)$$

b) Bobina fiind aşezată pe un miez magnetic, inductivitatea o putem calcula cu (6.76), reluctanța echivalentă este formată din porțiunea de fier în serie cu întrefierul (parcurse de acelaşi flux Φ_f): $R_m = R_{m_f} + R_{m_o}$. Permeanța porţiunii de fier o determinăm prin metoda tuburilor de flux, tuburi luate de-alungul miezului:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{m_f} &= \int_{A_{Fe}} \frac{\mu\ ds}{\ell} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu (h\ dr)}{(2\pi - \alpha) r} = \frac{\mu h}{2\pi - \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} \\ \text{Analog:}\quad \Lambda_{m_o} &= \frac{\mu_o h}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} \end{aligned}\right\} \quad (6.87)$$

Reluctanța echivalentă este de forma:

$$R_m = R_{m_f} + R_{m_o} = \frac{1}{\Lambda_{m_f}} + \frac{1}{\Lambda_{m_o}} \Rightarrow L = \frac{N^2}{R_m} = \mu \frac{N^2 h}{(2\pi - \alpha) + \mu_r \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6.88)$$

expresie identică cu (6.86) obținută prin definiția clasică a lui L.

Dacă miezul este toroidal fără întrefier, atunci în expresiile precedente se consideră $\alpha = 0$ şi rezultă valoarea L' :

$$L' = L\big|_{\alpha=0} = \frac{\mu N^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6.89)$$

4) Să se determine inductivitatea mutuală dintre un fir rectiliniu şi o spiră Γ triunghiulară având o latură paralelă cu firul (figura 6.29).

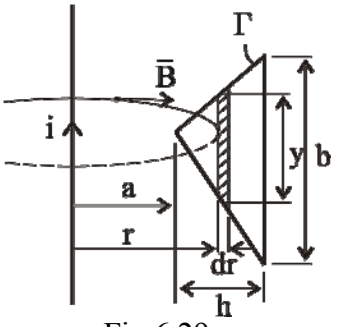


Fig 6.29

Firul creează câmpul $\bar{B}=\frac{\mu i}{2\pi r}\bar{u}_\varphi$ care determină prin spira Γ un flux:

$$\Phi_{S_\Gamma}=\int_{S_\Gamma} B\,ds=\int\frac{\mu i}{2\pi r}y\,dr=\int_a^{a+h}\frac{\mu i}{2\pi r}\frac{b}{h}(r-a)\,dr$$

$$\Phi_{21}=\Phi_{S_\Gamma}=\frac{\mu b i}{2\pi h}\left(h-a\ln\frac{a+h}{a}\right)$$

$$L_{12}=L_{21}=\frac{\Phi_{21}}{i}=\frac{\mu b}{2\pi h}\left(h-a\ln\frac{a+h}{a}\right) \qquad (6.90)$$

5) Două linii bifilare vecine sunt aşezate ca în figura 6.30. Se cere inductivitatea mutuală dintre linii şi t.e.m indusă în linia Γ_2.

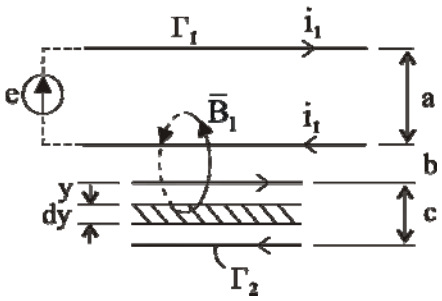


Fig 6.30

Linia 1 creează câmpul magnetic $\bar{B}_1$:

$$B_1=\frac{\mu_o i_1}{2\pi}\left(\frac{1}{y+b}-\frac{1}{y+a+b}\right)$$

care produce un flux magnetic prin suprafaţa circuitului 2:

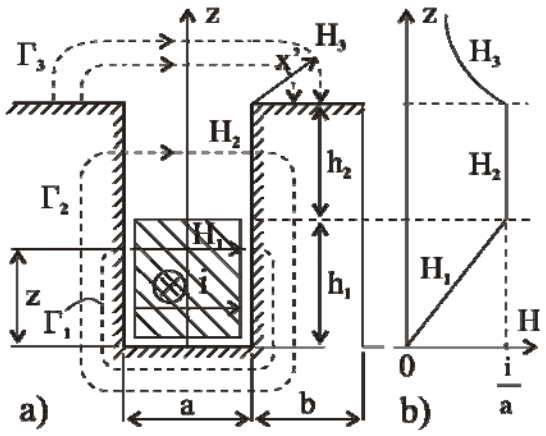
$$\Phi_{21}=\int_o^c B_1(\ell\,dy)=\frac{\mu_o i_1\ell}{2\pi}\ln\frac{1+\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{a+b}} \qquad (6.91)$$

Inductivitatea mutuală are expresia: $L_{12}=L_{21}=\frac{\Phi_{21}}{i_1}$ iar t.e.m indusă în linia Γ_2 va fi:

$$e_2=-L_{21}\frac{di_1}{dt}=-\frac{\mu_o\ell}{2\pi}\ln\frac{1+\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{a+b}}\frac{di_1}{dt} \qquad (6.92)$$

6) Să se determine inductivitatea de disperesie a unei crestături feromagnetice (figura 6.31).

Într-o crestătură de lungime ℓ, adâncime (h_1+h_2) şi lăţime a, într-un material feromagnetic (crestătura rotorului la o maşină electrică rotativă)



este introdusă o bară de secțiune ah_1 parcursă uniform de curentul i. Aplicând teorema lui Ampère succesiv pe curbele Γ_1, Γ_2 şi Γ_3 se obțin succesiv expresiile câmpurilor H_1, H_2 şi H_3 din cele trei porțiuni:

← Fig 6.31

$$\begin{cases} \oint_{\Gamma_1} H_1 d\ell = i_{S_{\Gamma_1}} \rightarrow H_1 a = i\dfrac{z}{h_1} \rightarrow H_1 = \dfrac{i}{ah_1}\cdot z \\ \oint_{\Gamma_2} H_2 d\ell = i_{S_{\Gamma_2}} \rightarrow H_2 a = i \rightarrow H_2 = \dfrac{i}{a} \\ \oint_{\Gamma_3} H_3 d\ell = i_{S_{\Gamma_3}} \rightarrow H_3\left(a+\pi x'\right) = i \rightarrow H_3 = \dfrac{i}{a+\pi x'} \end{cases} \qquad (6.93)$$

Distribuția câmpului $\bar{H}$ între pereții crestăturii (câmpul de dispersie) este reprezentată în figura 6.31-b pe baza expresiilor (6.93). La fundul crestăturii câmpul este nul iar la partea de sus a barei ($a = h_1$) câmpul are valoarea maximă (i/a).

Fluxul de dispersie printr-o porțiune de înălțime dz este $d\Phi_d = B\ell\ dz = i\ d\Lambda_{m_z}$. Fluxul de dispersie total între pereții crestăturii este:

$$\Phi_d = \int_o^{h_1} \frac{\mu_o i}{ah_1}\cdot \ell z\ dz + \int_o^{h_2} \frac{\mu_o i}{a}\cdot \ell\ dz + \int_o^{\frac{b}{2}} \frac{\mu_o i}{a+\pi x'}\cdot \ell\ dx' =$$

$$= \mu_o i\ \ell\left[\frac{h_1}{2a} + \frac{h_2}{a} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{a+\pi\frac{b}{2}}{a}\right]$$

iar inductivitatea de dispersie a crestăturii este $L_d = \dfrac{\Phi_d}{i}$.

•) Fluxul de dispersie (cel care se închide de la un perete la altul al crestăturii feromagnetice) parcurge trei permeanțe în paralel a căror valori sunt de forma:

$$\Lambda_{m_1} = \frac{\mu_o S_{1med}}{a} = \frac{1}{2}\frac{\mu_o \ell\ h_1}{a}$$

$$\Lambda_{m_2} = \frac{\mu_o S_2}{a} = \frac{\mu_o \ell\ h_2}{a}$$

$$\Lambda_{m_3} = \int_o^{\frac{b}{2}} \frac{\mu_o \ell\ dx}{a + \frac{\pi}{2}x} = \frac{2\mu_o \ell}{\pi} \ln \frac{a + \frac{\pi}{2}b}{a}$$

iar inductivitatea de dispersie se scrie astfel:

$$L_d = N^2 \Lambda_{m_e} = \Lambda_{m_e} = \Lambda_{m_1} + \Lambda_{m_2} + \Lambda_{m_3}$$

deci aceeaşi expresie ca prin definiția sa clasică.

7. Energii şi forțe în câmpuri electromagnetice

7.1 Teorema energiei electrice

Un sistem de n corpuri conductoare aflate la potențialele $V_1, V_2 \dots V_n$ şi încărcate cu sarcinile $q_1, q_2 \dots q_n$ creează în jurul lor un câmp electric cu un anumit spectru, câmp care înmagazinează în el o cantitate de energie electrică W_e:

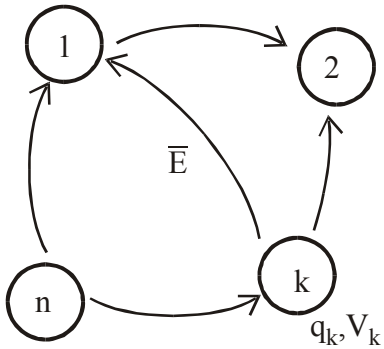


Fig. 7.1

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q_k V_k \qquad (7.1)$$

energie care depinde de toate sarcinile şi potențialele corpurilor din sistem, valoare egală cu lucrul mecanic cheltuit pentru încărcarea corpurilor cu sarcină.

Dimensional relația (7.1) înseamnă: $[W_e] = [q]\cdot[V] = CV = AV\,sec = W\,sec = J$.

Pentru un condensator ($q_1 = -q_2 = q$) relația (7.1) devine:

$$W_e = \frac{1}{2}q_1V_1 + \frac{1}{2}q_2V_2 = \frac{1}{2}q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{q^2}{2C} \qquad (7.2)$$

Expresia $\left(\frac{1}{2}CU^2\right)$ o utilizăm pentru condensatoare cuplate la tensiunea U iar $\left(\frac{q^2}{2C}\right)$ pentru condensatoare decuplate dar care au rămas încărcate cu sarcina q.

Ținând seama de prima formă a relațiilor lui Maxwell:

$V_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j$, relația funcționalei de energie (7.1) se scrie sub forma :

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q_k \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_j = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} q_k q_j = f_1(\text{geometria corpurilor}, \varepsilon, q_1 \dots q_n) \qquad (7.3)$$

Dacă ținem seama de a doua formă a relațiilor lui Maxwell: $q_k = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj} V_j$,

funcționala de energie (7.1) se va exprima sub forma:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj} V_k V_j = f_2 \left(\text{geometria corpurilor}, \varepsilon, V_1, V_2 \ldots V_n \right) \quad (7.4)$$

În expresia (7.3) trebuie cunoscute sarcinile de pe toate corpurile din sistem, în (7.4) trebuie cunoscute potențialele tuturor corpurilor şi generalizând, putem afirma că energia electrică se poate evalua dacă pentru o parte dintre corpuri se cunosc sarcinile iar pentru celelalte se cunosc potențialele:

$$W_e = f_3 \left(\text{geometria corpurilor}, \varepsilon, q_1, q_2 \ldots q_k, V_{k+1} \ldots V_n \right) \quad (7.5)$$

Expresiile (7.3),(7.4),(7.5) exprimă însă energia electrică într-un mod impropriu. Ea este localizată în câmpul electric dintre corpuri, deci ar trebui exprimată în funcție de parametrii câmpului electric.

La un condensator plan, între armături se creează un câmp electric uniform de intensitate E=U/d şi energia electrică se va repartiza uniform în acest câmp.

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon A}{d} \left(E^2 d^2 \right) = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \left(Ad \right) = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \cdot V_{\text{dielectric}} \quad (7.6)$$

Densitatea de energie electrică se scrie sub forma:

$$w_e' = \frac{W_e}{V_{\text{dielectric}}} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \left[\text{j} / \text{m}^3 \right] \quad (7.7)$$

În câmpuri neuniforme densitatea de energie electrică se scrie succesiv sub forma:

$$w_e' = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon} = \frac{ED}{2} = \frac{\overline{E}\,\overline{D}}{2} \left[\text{j} / \text{m}^3 \right] \quad (7.8)$$

Integrând densitatea de energie (7.8) pe volumul $\mathcal{V}_\Sigma$ determinăm câtă energie electrică există în volumul delimitat de suprafața Σ:

$$W_{e\Sigma} = \int_{\mathcal{V}_\Sigma} w_e' dv = \int_{\mathcal{V}_\Sigma} \frac{\overline{D}\,\overline{E}}{2} dv \quad (7.9)$$

Cu expresiile (7.3),(7.4) şi (7.5) putem determina *energia electrică totală* a unui sistem, fără a putea aprecia cum se repartizează ea în spațiu, unde este mai concentrată, etc.

Dacă extindem volumul $\mathcal{V}_\Sigma$ din (7.9) la $\mathcal{V}_\infty$, putem obține energia electrică totală la fel cu formele anterioare:

$$W_{e_{total}} = \int_{\mathcal{V}_\infty} \frac{\overline{D}\overline{E}}{2} dv \qquad (7.10)$$

Dimensional densitatea de energie electrică se exprimă astfel:

$$\left[w'_e\right] = \left[\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right] = \frac{F}{m}\frac{V^2}{m^2} = \frac{CV}{m^3} = \frac{j}{m^3}$$

Mai mult, expresiile (7.1),(7.3),(7.4) şi (7.5) sunt valabile doar în regim electrostatic, când câmpul electric este produs de un sistem de corpuri încărcate, pe când expresiile (7.9),(7.10) sunt valabile în orice regim de funcționare, chiar şi în câmpuri electrice variabile.

Expresia $w'_e = \frac{DE}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon}$ este valabilă doar în medii izotrope iar expresia $w'_e = \frac{\overline{D}\overline{E}}{2}$ este valabilă şi în medii anizotrope, dar liniare.

7.2 Teorema energiei magnetice

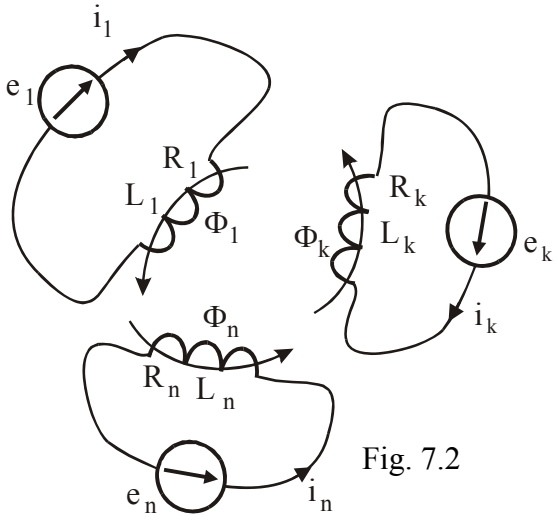


Fig. 7.2

Un sistem de n circuite aflate în prezență sunt alimentate de sursele $e_1, e_2 \ldots e_n$ cu curenții $i_1, i_2 \ldots i_n$ şi se creează prin suprafețele lor fluxurile totale $\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_n$. În câmpul magnetic creat în jurul acestui sistem de circuite se înmagazinează energie magnetică a cărei expresie:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \Phi_k i_k \qquad (7.11)$$

pune în evidență faptul că ea depinde de fluxurile şi curenții din circuitele sistemului. Dimensional relația (7.11) înseamnă:

$$\left[W_m\right] = \left[\Phi\right]\left[i\right] = Wb \cdot A = A \cdot V\,sec = J$$

Exprimând fluxurile magnetice totale Φ_k cu prima formă a relațiilor lui Maxwell: $\Phi_k = \sum_{j=1}^{n} L_{kj} i_j$, funcționala energiei magnetice devine:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{kj} i_k i_j = f_1(\text{geometria circuitelor}, \mu, i_1, i_2 \ldots i_n) \qquad (7.12)$$

Dacă exprimăm curenții din (7.11) cu forma a doua a relațiilor lui Maxwell, pentru sisteme de circuite: $i_k = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{kj} \Phi_j$, se obține expresia:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Gamma_{kj} \Phi_k \Phi_j = f_2\ (\text{geometria circuitelor}, \mu, \Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_n) \qquad (7.13)$$

În (7.12) pe lângă geometria circuitelor şi μ_{mediu} trebuie cunoscuți toți curenții iar în (7.13) toate fluxurile magnetice. Generalizând, funcționala de energie este determinată dacă pentru o parte dintre circuitele sistemului se cunosc curenții şi pentru celelalte se cunosc fluxurile totale:

$$W_m = f_3\ (\text{geometria circuitelor}, \mu, i_1, i_2 \ldots i_k, \Phi_{k+1} \ldots \Phi_n) \qquad (7.14)$$

Pentru o bobină de inductivitate L parcursă de curentul i, fluxul magnetic total este $\Phi = L \cdot i$ iar energia din câmpul propriu este:

$$W_m = \frac{1}{2}\Phi i = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{\Phi^2}{2L} \qquad (7.15)$$

Pentru un sistem format din două circuite cuplate magnetic, energia magnetică cu (7.12) este:

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{21} i_2 i_1 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 \qquad (7.16)$$

unde:

$$\begin{cases} W_{m_1} = \dfrac{1}{2} L_1 i_1^2 & \text{-este energia din câmpul propriu al bobinei 1} \\ W_{m_2} = \dfrac{1}{2} L_2 i_2^2 & \text{-este energia din câmpul propriu al bobinei 2} \\ W_{m_{12}} = L_{12} i_1 i_2 & \text{-este } \textit{energia magnetică de interacțiune} \text{ dintre bobinele } L_1 \text{ şi } L_2 \end{cases}$$

Energia magnetică de interacțiune dintre cele două bobine se poate scrie astfel:

$$W_{m12} = i_1 \Phi_{12} = i_2 \Phi_{21} = i_1 i_2 L_{12} \qquad (7.17)$$

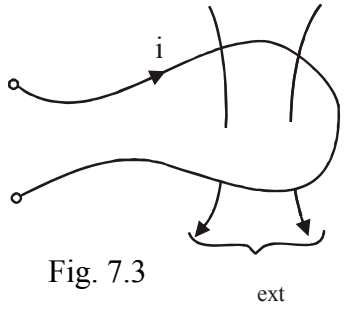


Fig. 7.3

Dacă avem un singur circuit plasat într-un câmp magnetic exterior, astfel că Φ_{ext} este fluxul acestui câmp prin suprafaţa circuitului, atunci conform (7.17) *energia de interacţiune dintre circuit şi câmpul exterior* este:

$$W_{int\,er} = i \cdot \Phi_{ext} \qquad (7.18)$$

Formele (7.11)…(7.16) ale funcţionalei de energie magnetică exprimă energia în funcţie de mărimile ce caracterizează circuitele componente, deşi ea este localizată în câmpul magnetic din jurul circuitelor. Pentru un solenoid (cu câmp magnetic uniform (vezi relaţia (6.79)) energia magnetică este:

$$W_m = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu N^2 A}{l}i^2 = \frac{1}{2}\mu\frac{N^2 \cdot i^2}{l^2}(Al) = \frac{1}{2}\mu H^2 v \qquad (7.19)$$

şi ea se repartizează uniform în câmpul magnetic cu densitatea:

$$w'_m = \frac{W_m}{v} = \frac{1}{2}\mu H^2 \qquad (7.20)$$

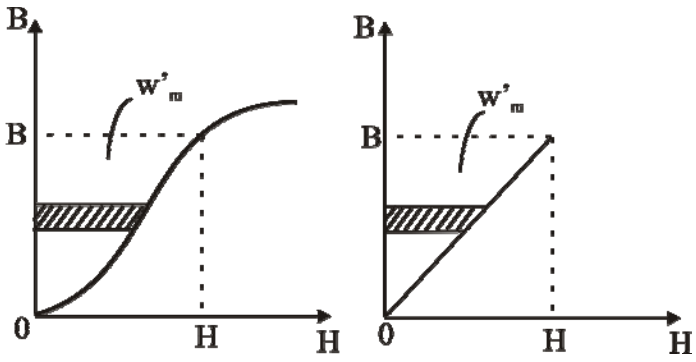
sau generalizând si pentru medii anizotrope (şi câmpuri neuniforme) se obţine:

$$w'_m = \frac{dW_m}{dv} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{BH}{2} = \frac{\overline{B}\,\overline{H}}{2} \qquad (7.21)$$

Dimensional, densitatea de energie magnetică înseamnă:

$$\left[w'_m\right] = \left[\frac{1}{2}\mu H^2\right] = \frac{H}{m}\left(\frac{A}{m}\right)^2 = \frac{Wb \cdot A}{m^3} = \frac{J}{m^3}$$

În general, în medii neliniare, densitatea de energie magnetică înseamnă:



a) Fig. 7.4 b)

$$w'_m = \int_0^B \overline{H}\,d\overline{B} \qquad (7.22)$$

şi are semnificaţia ariei de pe caracteristica neliniară din figura 7.4.

Pentru medii liniare: $\overline{B} = \mu\overline{H}$ şi se obţine din fig 7.4-b:

$$w'_m = \int_0^B \overline{H}\, d\overline{B} = \int_0^H \mu \overline{H}\, d\overline{H} = \frac{1}{2}\mu H^2 \qquad (7.23)$$

În funcție de potențialul magnetic A, densitatea de energie este: $w'_m = \frac{1}{2}\overline{J}\,\overline{A}$.

Energia magnetică parțială, conținută în volumul v_Σ, sau cea totală din volumul v_∞ vor avea expresiile:

$$W_{m\Sigma} = \int_{\mathcal{V}_\Sigma} \frac{\overline{B}\overline{H}}{2} dv\,; \qquad W_{m_\infty} = \int_{\mathcal{V}_\infty} \frac{\overline{B}\overline{H}}{2} dv \qquad (7.24)$$

Energia totală calculată cu (7.24) coincide cu cea calculată cu (7.11)…(7.16) care tot energiile totale exprimă, fără însă a indica cum se repartizează ea în spațiu. De asemenea, formele (7.11)…(7.16) sunt valabile în regim staționar sau cvasistaționar (joasă frecvență) iar (7.24) sunt valabile în orice regim de funcționare.

Observație: Pentru un sistem de circuite cuplate energia magnetică dată de (7.12) se scrie sub forma:

$$\begin{cases} W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{L_{kj} i_j}_{\Phi_{kj}} i_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Phi_{kj} i_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \Phi_k i_k \\ \Phi_k = \sum_{j=1}^{n} L_{kj} i_j \end{cases} \qquad (7.25)$$

Funcționalele $W_m(\Phi_k, i_k)$ și $\Phi_k(L_{kj}, i_k)$ au dependențe liniare, deci:

$$L_{kj} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial i_j} = \frac{\partial}{\partial i_j}\left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k}\right) = \frac{\partial}{\partial i_k}\left(\frac{\partial W_m}{\partial i_j}\right) = \frac{\partial \Phi_j}{\partial i_k} = L_{jk} \qquad (7.26)$$

Relația (7.26) exprimă faptul că în medii liniare inductivitățile mutuale dintre două circuite din sistem verifică *teorema reciprocității pentru inductivități* $(L_{kj} = L_{jk})$, respectiv matricea $[L]$ pentru un sistem de circuite cuplate este simetrică în raport cu diagonala principală.

7.3 Teorema energiei electromagnetice

Această teoremă este o consecință a ecuațiilor lui Maxwell bazată pe concepția despre câmpul electromagnetic considerat ca un sistem fizic capabil să schimbe, să acumuleze şi să transmită energie.

Într-un mediu liniar $(\varepsilon = ct, \mu = ct)$ considerăm o suprafață închisă $\sum$ în interiorul căreia se găsesc corpuri imobile ($\overline{v} = 0$, deci nu se cheltuie

energie pentru deplasarea lor) în interacțiune cu câmpul electromagnetic. În domeniul $\mathcal{V}_\Sigma$ câmpul electromagnetic are înmagazinată energia:

$$W = \int_{\mathcal{V}_\Sigma} \left(\frac{\overline{D}\,\overline{E}}{2} + \frac{\overline{B}\,\overline{H}}{2} \right) \tag{7.27}$$

Bazat pe principiul de conservare a energiei, viteza de scădere a acestei energii trebuie să fie egală cu suma puterilor cedate de câmpul interior altor sisteme fizice cu care este în contact. Dar câmpul interior este în contact direct doar cu corpurile interioare, cărora le transferă energie pentru a acoperi pierderile de putere prin efect Joule (P_j) şi cu domeniul din exteriorul suprafeței Σ, deci:

$$-\frac{dW}{dt} = P_j + P_\Sigma \tag{7.28}$$

unde: $P_j = \int_{v_\Sigma} \overline{E}\,\overline{J} dv$ sunt pierderile de putere prin efect Joule iar P_Σ este puterea cedată prin suprafața Σ câmpului exterior. Ținând seama de identitatea:

$$\operatorname{div}\left(\overline{H}\times\overline{E}\right) = \nabla\left(\overline{H}\times\overline{E}\right) = \nabla\left(\dot{\overline{H}}\times\overline{E}\right) + \nabla\left(\overline{H}\times\dot{\overline{E}}\right) = \overline{E}\cdot\operatorname{rot}\overline{H} - \overline{H}\cdot\operatorname{rot}\overline{E} \tag{7.29}$$

pierderile locale de putere prin efect Joule se scriu succesiv sub forma:

$$p_j = \overline{E}\overline{J} = \overline{E}\left(\operatorname{rot}\overline{H} - \frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\right) = \operatorname{div}\left(\overline{H}\times\overline{E}\right) + \overline{H}\cdot\operatorname{rot}\overline{E} - \overline{E}\frac{\partial\overline{D}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\overline{H}\times\overline{E}\right) - \left(\overline{H}\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} + \overline{E}\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\right) =$$

$$= \operatorname{div}\left(\overline{H}\times\overline{E}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{D}\,\overline{E}}{2} + \frac{\overline{B}\,\overline{H}}{2}\right) \tag{7.30}$$

Integrând expresia (7.30) pe volumul v_Σ se obține:

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}_\Sigma} p_j dv}_{P_j} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}_\Sigma} \operatorname{div}\left(\overline{H}\times\overline{E}\right) dv}_{-P_\Sigma} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}_\Sigma}\left(\frac{\overline{D}\,\overline{E}}{2} + \frac{\overline{B}\,\overline{H}}{2}\right) dv}_{-\frac{\partial W}{\partial t}} \tag{7.31}$$

Comparat cu ecuația de bilanț al puterilor (7.28), integralele din (7.31) au semnificațiile notate sub fiecare dintre ele.

Puterea transmisă (radiată) de câmpul electromagnetic interior prin suprafața Σ spre exterior are expresia:

$$P_\Sigma = \int_{\mathcal{V}_\Sigma} \operatorname{div}\left(\overline{E}\times\overline{H}\right) dv = \int_\Sigma \left(\overline{E}\times\overline{H}\right)\overline{ds} = \int_\Sigma \overline{S}\,\overline{ds} \tag{7.32}$$

unde: $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$ reprezintă *vectorul Poynting* sau *densitatea de putere* ce se transmite prin câmpul electromagnetic.Dimensional verifică semnificația sa: $[\bar{S}] = [\bar{E}] \cdot [\bar{H}] = \frac{V}{m} \cdot \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}$.

Expresia (7.32) a puterii ce iese prin $\sum$ se generalizează şi pentru puteri ce se transmit printr-o suprafață deschisă S_Γ:

$$P_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \bar{S}\, \bar{ds} = \int_{S_\Gamma} \bar{S}\, \bar{n}\, ds \qquad (7.33)$$

Sensul arbitrar ales pentru $\bar{ds}$ (respectiv $\bar{n}$) este *sensul de referință* pentru puterea ce se transmite; dacă rezultă $P_{S\Gamma} > 0$ înseamnă ca energia se transmite efectiv în sensul lui $\bar{n}$.

7.3.1 Puterea electromagnetică transmisă printr-o undă plană

Considerăm o undă plană, ca în figura 4.3 caracterizată (relația 4.38) prin mărimile:

$$\bar{E} = \bar{j} E_y \ ; \ \bar{H} = \bar{k} H_z = \bar{k} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_y \leftrightarrow \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\mu H^2 \leftrightarrow w'_e = w'_m \qquad (7.34)$$

Se constată că în cazul undei plane transmisia energiei prin câmp are două proprietăți speciale:

- Energia electromagnetică se repartizează egal între componenta electrică şi cea magnetică a undei electromagnetice ($w'_e = w'_m$). Densitatea de energie a undei electromagnetice este:

$$w' = \frac{\bar{D}\bar{E}}{2} + \frac{\bar{B}\bar{H}}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 = \varepsilon E^2 = \mu H^2 = 2w'_e = 2w'_m \qquad (7.35)$$

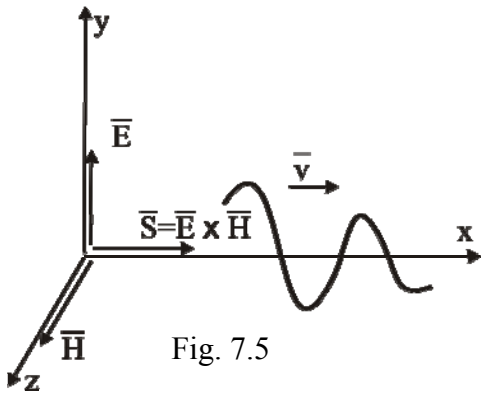


Fig. 7.5

- Vectorul Poynting este dirijat în direcția de propagare a undei electromagnetice: $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} = \bar{i} S_x = \bar{i} S$.

$$S = EH = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2 = \frac{\varepsilon E^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = v \cdot w' \tag{7.36}$$

Modulul densităţii de putere radiată (transmisă) S este egal cu produsul dintre densitatea de energie a undei (w') şi viteza de fază a undei (v).

Totul se petrece ca şi cum unda ar „transporta" energia localizată în câmpul său, pe măsură ce ea înaintează pe direcţia de propagare (Ox) cu viteza sa de fază (v).

Această proprietate nu este generală, energia se transmite prin câmp si în absenţa undelor (câmpuri desprinse de circuitul radiant), de exemplu în regimuri staţionare (cvasistaţionare) prin fire (linii de transmisie).

În general, pentru ca un câmp să transmită energie, el trebuie să fie *electromagnetic*, adică $\overline{E}$ şi $\overline{H}$ să nu fie independenţi, să fie variabile în timp, nu numai ca ele să coexiste în aceeaşi regiune a spaţiului; (de exemplu: $\overline{E}$ creat de sarcini electrice şi $\overline{H}$ creat de un magnet permanent, suprapuse nu înseamnă câmp electromagnetic).

7.3.2 Puterea electromagnetică transmisă printr-un conductor

Considerăm un conductor rectiliniu, de formă cilindrică cu raza a, lungime *l*, care are rezistivitatea ρ şi e parcurs de curentul de conducţie i.

Liniile câmpurilor $\overline{E}$ şi $\overline{H}$ create de acest fir (în interiorul şi exteriorul firului) arată ca în figura 7.6.

În interiorul conductorului, liniile câmpului electric sunt paralele cu

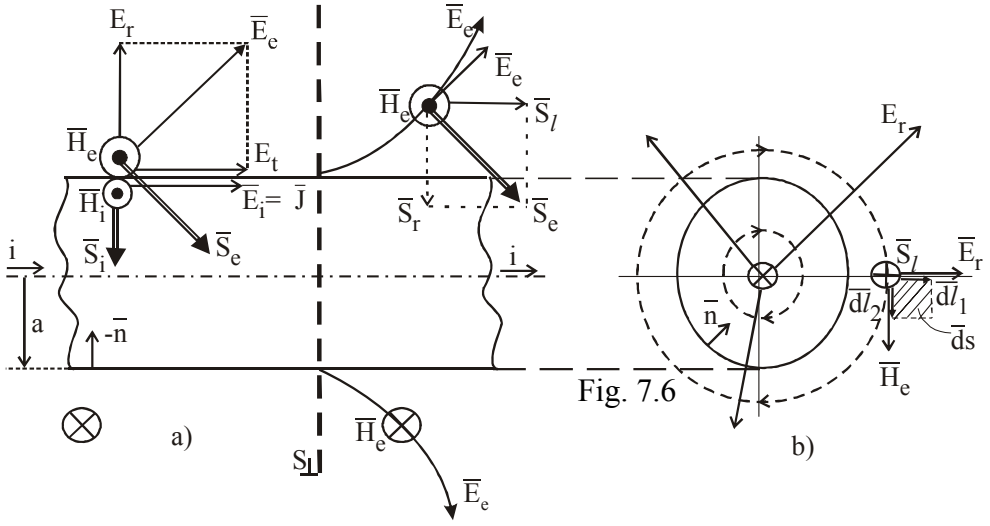


Fig. 7.6

axa: $\bar{E}_{int} = \rho\bar{J}$ iar liniile lui $\bar{H}_i$ sunt cercuri concentrice cu firul. În consecință în interiorul firului, vectorul Poynting: $\bar{S}_i = \bar{E}_i \times \bar{H}_i = -\bar{u}_r S_i$.
El este dirijat spre axă şi asigură fluxul de energie necesară pentru a acoperi pierderile Joule din fir.

În exterior (r>a), liniile lui $\bar{H}_e$ rămân tot cercuri (figura 7.6) iar liniile lui $\bar{E}_e$ ies din conductor înclinate în direcția liniilor de curent $\bar{J}$
(la suprafața firului se conservă componenta tangențială a lui $\bar{E}$:
$E_i = E_t = (E_e)_{tg}$. Componenta radială E_r corespunde potențialului V la care se află firul: $V = -\int_{\infty}^{a} E_r dr$.

Vectorul Poynting, în exterior, $\bar{S}_e$ are o componentă *longitudinală* $\bar{S}_l$ care asigură transmisia energiei în lungul conductorului şi alta *radială* $\bar{S}_r$ care asigură fluxul de energie spre interiorul firului, pe direcție radială. Vom arăta că fluxul acestei componente prin suprafața laterală a firului (r=a) acoperă pierderile Joule din fir:

$$P_r = \int_{S_{lat}} \bar{S}_r \bar{ds} = \int_{S_{lat}} (\bar{E}_t \times \bar{H}) \bar{ds} = \int_{S_{lat}} E_t H ds = E_{t_o} H_o 2\pi a l = \\ = \rho J \frac{i}{2a\pi} 2\pi a l = \frac{\rho l}{\pi a^2} i^2 = R_{fir} i^2 \qquad (7.37)$$

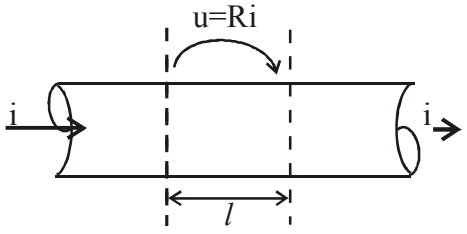


Fig. 7.7

Câmpul magnetic pe suprafața firului este: $H_o = \frac{i}{2\pi a}$ iar câmpul electric în interiorul firului este: $E_i = E_t = \rho J$. Pentru un tronson de lungime *l* avem:

$$E_t \cdot l = u = R \cdot i \qquad (7.38)$$

unde R este rezistența tronsonului de conductor considerat (figura 7.7);
Deci: $P_r = ui = Ri^2$.

Puterea care se transmite în lungul conductorului prin suprafața $S_\perp$ din figura 7.6 are expresia:

$$P_l = \int_{S_\perp} \bar{S}_l \bar{ds} = \int_{S_\perp} (\bar{E}_r \times \bar{H}) \bar{ds} = \int_{\Gamma_1\Gamma_2} \oint (\bar{E}_r \times \bar{H})(\overline{dl_1} \times \overline{dl_2}) = \underbrace{\int_{\Gamma_1} \bar{E}_r \overline{dl_1}}_{u} \cdot \underbrace{\oint_{\Gamma_2} \bar{H} \overline{dl_2}}_{i} = u \cdot i \qquad (7.39)$$

deoarece vectorii $\overline{H}$ şi de $\overline{dl}_1$, respectiv $\overline{E}_r$ şi $\overline{dl}_2$ sunt perpendiculari între ei (figura 7.6-b) şi produsele acestora s-au anulat.
Puterea P_l se transmite în lungul firului printr-o suprafaţă $S_\perp$ infinit extinsă şi perpendiculară pe axa firului.

În procesul de conducţie printr-un fir, energia se transmite doar prin câmpul din exteriorul conductorului, singurul care are componentă longitudinală $\overline{S}_l$ a vectorului Poynting: conductorul are doar rolul de a ghida în spaţiu această transmisie(traseul) şi pentru aceasta absoarbe din energia câmpului exterior o putere P_r necesară pentru a-şi acoperi pierderile interioare prin efect electrocaloric.

Starea(câmpul) electromagnetică se propagă odată cu cuplarea firului (alimentarea sa), prin câmpul din jurul său, cu viteza $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ şi acolo unde ajunge, o parte din energia sa pătrunde în conductor, pune în mişcare ordonată sarcinile(electronii liberi se propagă prin conductor lent, cu o viteză de ordinul mm/sec). Deci nu electronii liberi, care se mişcă ordonat printr-un conductor parcurs de curent, transmit energia în lungul firului, ci câmpul electromagnetic din jurul acestuia, de aceea energia se poate propaga şi fără fire conductoare, numai prin câmp electromagnetic (undă); energia se transmite fie în lungul firului, fie în lungul direcţiei de propagare a undei.

In cazul unei linii bifilare (figura 7.8) cu fir de dus şi întors, (1 şi 2) indiferent de sensul curentului, energia este transmisă de ambele fire ale liniei in acelaşi sens, spre receptor.

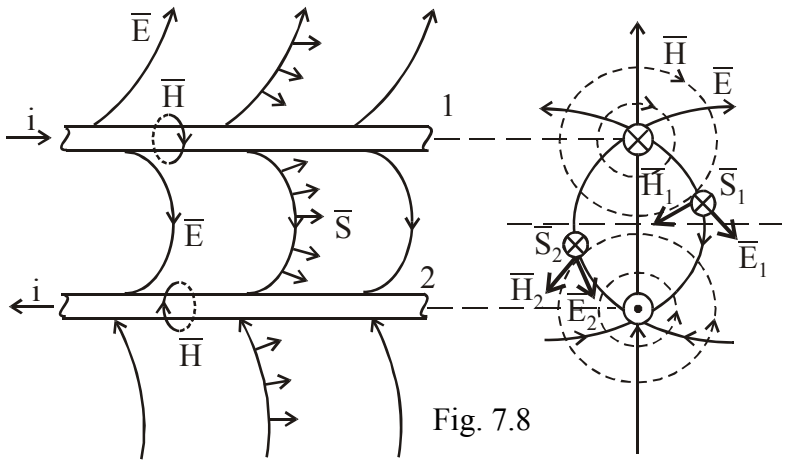


Fig. 7.8

Observaţie: Dacă puterea transmisă printr-un fir este: $P = V_{fir} \cdot i$ iar printr-o linie bifilară este: $P = ui$ atunci, aşa cum se prezintă în teoria circuitelor, puterea ce intră pe la bornele unui multipol cu n poli

este: $P = \sum_{k=1}^{n} V_k i_k$ iar puterea ce intră pe la bornele unui multiport cu m porți este:

$P = \sum_{k=1}^{m} u_k i_k$.

Din acest motiv studiul energetic al multor dispozitive electronice se poate reduce, punând în evidență doar legăturile dintre tensiuni(potențiale) şi curenții ce intră prin porți(poli), fără a fi întotdeauna nevoie a se cunoaşte detaliat procesele din interior.

7.4 Teoremele forțelor generalizate (lagragiene) în câmp electric

Configurația geometrică a unui sistem de corpuri este caracterizată printr-un număr de parametri de poziție; dacă un corp se poate mişca după câteva coordonate, al căror număr este *numărul gradelor de libertate* ale corpului respectiv, atunci aceste coordonate poartă numele generic de *coordonate generalizate.*

Forța care asigură deplasarea corpului după coordonata generalizată x poartă numele de *forță generalizată* X. Dacă x este o *deplasare liniară* atunci X este componenta unei *forțe* în lungul acelei deplasări; dacă x este un *unghi de rotație,* atunci X este un *moment(cuplu)* în raport cu axul de rotație; dacă x este o *arie,* X este o *tensiune superficială*; dacă x este *volum,* X este o *presiune*, etc.

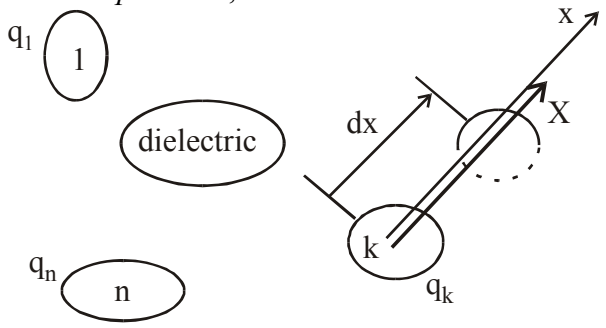


Fig. 7.9

Considerăm un sistem de n corpuri conductoare (figura 7.9) aflate în prezență, încărcate cu sarcinile $q_1, q_2 \ldots q_n$.

Dacă unul dintre corpurile conductoare (de exemplu corpul k), sau un bloc dielectric dintre corpuri, se poate deplasa după coordonata x sub acțiunea forței electrice X exercitată de câmp, atunci la o deplasare a corpului k cu dx, sarcinile tuturor corpurilor din sistem se modifică cu câte dq_k (ele sunt conectate la surse de potențiale $V_1 \ldots V_n$).

Energia primită în acest interval de la surse: $\sum_{k=1}^{n} V_k dq_k$ trebuie să acopere atât creşterea energiei câmpului electric (dW_e) cât şi lucrul mecanic efectuat de câmp pentru a schimba poziția corpului k $(dL = Xdx)$, respectiv:

$$\sum_{k=1}^{n} V_k dq_k = dW_e + Xdx \tag{7.40}$$

Ecuaţia (7.40) de bilanţ energetic este o ecuaţie diferenţială multivariabilă, care se poate integra doar în stări particulare. Să presupunem stările:

a) pe timpul deplasării corpului k, toate corpurile sunt deconectate de la surse, deci sarcinile lor rămân constante $\left(q_k = ct \rightarrow dq_k = 0\right)$ şi din (7.40) rămâne:

$$\left(dW_e\right)_{q=ct} = -Xdx \rightarrow X = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_{q=ct} \tag{7.41}$$

Expresia (7.41) reprezintă *prima teoremă a forţelor generalizate* în câmp electric. Semnul (-) arată că pentru deplasarea corpului se cheltuie energie din energia acumulată în câmpul sistemului, deci duce la micşorarea acestei energii.

b) pe timpul deplasării corpului k, toate corpurile rămân conectate la sursele de tensiune constantă (potenţialele lor $V_k = ct \rightarrow dV_k = 0$). La schimbarea configuraţiei geometrice a sistemului, variază capacităţile dintre conductoare şi deoarece $V_k = ct$, se vor modifica sarcinile lor cu dq_k :

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k q_k \rightarrow \left(dW_e\right)_{V_k=ct} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k dq_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q_k \underbrace{dV_k}_{=0}$$

$$\left(7.40\right) \rightarrow \left(dW_e\right)_{V_k=ct} = Xdx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k dq_k \Rightarrow X = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_{V_k=ct} \tag{7.42}$$

Expresia (7.42) reprezintă *teorema a doua a forţelor generalizate* în câmp electric. Aportul de energie de la surse: $\sum_{k=1}^{n} V_k dq_k$ este dublu faţă de creşterea energiei electrice a sistemului şi se împarte egal între creşterea energiei $\left(dW_e\right)$ şi lucrul mecanic dL=Xdx efectuat de forţele electrice.

Cele două expresii (7.41) şi (7.42) ale forţelor generalizate sunt echivalente şi dau acelaşi rezultat: forţa nu depinde de modul în care decurge procesul energetic la punerea corpurilor în mişcare. Descompunerea în cele două ipoteze (q=ct, V=ct) serveşte numai la calculul forţei, în general pe timpul mişcării unui corp din sistem se pot modifica şi sarcinile şi potenţialele.

Energia electrică a sistemului este o funcţională care depinde de sarcinile sistemului şi de coeficienţii de potenţial(care şi ei depind de geometria sistemului, respectiv de coordonatele generalizate, al căror număr

este egal cu numărul gradelor de libertate: $x_1, x_2 \dots x_p$, dacă există p grade de libertate). Deci:

$$W_e = W_e\left(q_1, q_2 \dots q_n, x_1, x_2 \dots x_p\right) \rightarrow dW_e = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W_e}{\partial q_k} \underbrace{dq_k}_{=0} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial W_e}{\partial x_k} dx_k$$

Sau (7.43)

$$W_e = W_e\left(V_1, V_2 \dots V_n, x_1, x_2 \dots x_p\right) \rightarrow dW_e = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W_e}{\partial V_k} \underbrace{dV_k}_{=0} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial W_e}{\partial x_k} dx_k \quad (7.44)$$

Pentru a calcula forța generalizată cu prima teoremă (7.41) energia se scrie sub forma (7.43), punându-se în evidență parametrii constanți $q_k = ct$ şi $X_k = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_k}\right)_q$ iar pentru a calcula cu teorema a doua (7.42), energia se va scrie sub forma (7.44) şi-n acest caz forța care determină o mişcare după coordonata x_k va fi: $X_k = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_k}\right)_V$.

Pentru un condensator la care una dintre armături (sau un strat dielectric) este deplasabil, forța generalizată ce acționează asupra corpului mobil este:

$$\begin{cases} X = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_q = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = -\frac{q^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2}u^2\frac{\partial C}{\partial x} \\ X = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right) = \frac{1}{2}u^2\frac{\partial C}{\partial x} \end{cases} \quad (7.45)$$

deci rezultatul este acelaşi, indiferent de teoremă, forța depinde de variația capacității C în funcție de gradul de libertate x, $\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)$. Întotdeauna se consideră corpul mobil într-o poziție intermediară (x) şi se calculează capacitatea sistemului C(x) şi apoi forța cu (7.45).

- Indiferent de teorema utilizată pentru calculul forței generalizate X, dacă a rezultat X>0 înseamnă că forța X duce la *creşterea coordonatei* generalizate x iar dacă X<0 ea va duce la *micşorarea coordonatei* x.
- Forțele generalizate X sunt forțe rezultante ce acționează asupra corpurilor aflate în câmp electric. Corpurile se presupun rigide (nedeformabile) pe timpul deplasării, forța X este concentrată în

centrul de greutate al corpului. Se poate arăta că această forţa se distribuie asupra substanţei corpului pe tot volumul său ca o stare de presiune sau numai pe suprafaţa lor ca o tensiune superficială. Numai dacă se cunoaşte distribuţia forţelor electrice (magnetice) asupra unui corp se poate face un calcul de dimensionare a corpului ca să reziste solicitării. Forţele generalizate X ne permit să studiem mişcarea corpurilor şi care sunt tendinţele de mişcare a unui corp într-un câmp electric.

7.5 Teoremele forţelor generalizate în câmp magnetic

Şi în câmp magnetic, la fel ca în câmp electric, putem determina forţa rezultantă care o exercită câmpul magnetic asupra unui circuit dintr-un ansamblu de n circuite sau asupra unei armături feromagnetice.

Energia magnetică a sistemului de circuite se poate exprima în funcţie de fluxurile sau curenţii din circuite şi în funcţie de geometria sistemului(gradele de libertate $x_1, x_2 \ldots x_p$ dacă sistemul prezintă p grade de libertate). Forţa generalizată se calculează separat pentru fiecare coordonată generalizată din cele p.

$$W_m = W_m\left(i_1, i_2 \ldots i_n, x_1, x_2 \ldots x_p\right) \tag{7.46}$$

$$W_m = W_m\left(\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_n, x_1, x_2 \ldots x_p\right) \tag{7.47}$$

La mişcarea circuitului j cu dx_j se modifică fluxurile cu câte $d\Phi_k$. Energia suplimentară absorbită de la surse trebuie să acopere variaţia energiei magnetice a sistemului $\left(dW_m\right)$ şi lucrul mecanic necesar pentru a mişca circuitul: $dL = Xdx$:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k d\Phi_k = dW_m + \sum_{j=1}^{p} X_j dx_j \tag{7.48}$$

Şi ecuaţia de bilanţ energetic (7.48) este o ecuaţie diferenţială multivariabilă, pe care o integrăm în stări particulare:

a) pe timpul deplasării circuitului j cu dx_j, fluxurile prin suprafeţele circuitelor rămân constante: $\Phi_k = ct \rightarrow d\Phi_k = 0$ şi din ecuaţia de bilanţ (7.48) rămâne:

$$\left.\begin{aligned}&\left(dW_m\right)_{\Phi_k=ct}=-\sum_{j=1}^{p}X_j dx_j\\&(7.47)\rightarrow\left(dW_m\right)_{\Phi_k=ct}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial W_m}{\partial\Phi_k}\underbrace{d\Phi_k}_{=0}+\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial W_m}{\partial x_j}dx_j\end{aligned}\right\}\Rightarrow X_j=-\left(\frac{\partial W_m}{\partial x_j}\right)_{\Phi_k=ct}$$

(7.49)

Expresia (7.49) este *prima teoremă a forțelor generalizate* în câmp magnetic. Dacă $\Phi_k=ct$, nu pot exista fenomene de inducție electromagnetică, deci nu există schimb de energie între circuite şi câmp şi-n acest caz lucrul mecanic pentru deplasarea corpului j se efectuează pe seama rezervei de energie existentă în câmpul magnetic, deci duce la scăderea acestei energii (aşa se explică (-) din 7.49).

Identificând (7.48) cu (7.49) rezultă: $i_k=\frac{\partial W_m}{\partial\Phi_k}$, respectiv $\Phi_k=\frac{\partial W_m}{\partial i_k}$.

b) considerăm că pe timpul deplasării circuitului j nu se modifică curenții din circuite ($i_k=ct$):

$$\left.\begin{aligned}&W_m=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Phi_k i_k\rightarrow\left(dW_m\right)_{i_k=ct}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}i_k d\Phi_k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Phi_k\underbrace{di_k}_{=0}\\&(7.48)\rightarrow\left(dW_m\right)_{i_k=ct}=\sum_{k=1}^{n}i_k d\Phi_k-\sum_{j=1}^{p}X_j dx_j\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\left(dW_m\right)_{i_k}=\sum_{j=1}^{p}X_j dx_j=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}i_k d\Phi_k\\&(7.46)\rightarrow\left(dW_m\right)_{i_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial W_m}{\partial i_k}\underbrace{di_k}_{=0}+\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial W_m}{\partial x_j}dx_j\end{aligned}\right\}\Rightarrow X_j=\left(\frac{\partial W_m}{\partial x_j}\right)_{i_k=ct}$$

(7.50)

Expresia (7.50) este *teorema a doua a forțelor generalizate* în câmp magnetic. Pentru a calcula forța magnetică generalizată cu (7.49) funcționala de energie magnetică trebuie scrisă sub forma (7.47) ca funcție de parametrii constanți (Φ_k) şi coordonatele generalizate iar pentru a putea calcula cu (7.50) energia W_m trebuie scrisă sub forma (7.46). În general, la mişcarea unui circuit pot varia simultan atât fluxurile cât şi curenții, cele două ipostaze rămân doar ipoteze de calcul.

Pentru o bobină, energia magnetică este de forma: $W_m = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{\Phi^2}{2L}$, iar forţa ce se exercită asupra bobinei sau asupra unui miez magnetic, calculată cu cele două teoreme este de forma:

$$\left.\begin{aligned} X_m &= -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{\Phi} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi^2}{2L}\right) = -\frac{\Phi^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{\Phi^2}{2L^2}\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}i^2\frac{\partial L}{\partial x} \\ (7.50):\ X_m &= \left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_i = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{1}{2}i^2\frac{\partial L}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (7.51)$$

deci rezultatul nu depinde de teorema utilizată. Trebuie evaluată expresia inductivităţii L a bobine atunci când armătura se află într-o poziţie intermediară x, se calculează $\frac{\partial L}{\partial x}$ şi cu (7.51) putem afla forţa ce se exercită asupra ei.

- Forţa generalizată în câmp electric $X_e = \frac{\partial}{\partial x}W_e(q, V, x)$ şi cea din câmp magnetic $X_m = \frac{\partial}{\partial x}W_m(i, \Phi, x)$ pot fi interpretate ca o viteză de variaţie a funcţionalei de energie electrică W_e sau magnetică W_m; forţele care provin din variaţia (derivata) unor funcţionale de energie, poartă numele, în mecanică, de *forţe lagragiene.*
- *Echilibrul mecanic* al sistemului de circuite se obţine acolo unde forţa $F_{rez} = 0$ (nu va exista deplasare) sau momentul $M_{rez} = 0$ (nu va exista rotaţie), deci în general când X=0, condiţie echivalentă cu $\frac{\partial W_e}{\partial x} = 0$ respectiv $\frac{\partial W_m}{\partial x} = 0$. Aceasta înseamnă însă un punct de extrem al funcţionalei de energie electrică (W_e) sau magnetică (W_m).

În mecanica newtoniană punctele de echilibru corespund unor minime ale funcţionalei de energie (corpurile obţin echilibru prin cădere, oprire din mişcare, etc); la fel şi în alte sisteme(termice),toate sunt *sisteme disipatoare.* În câmp electric şi magnetic sistemele găsesc echilibru în punctele de maxim ale funcţionalei de energie W_e sau W_m; ele sunt *sisteme acaparatoare* dacă sunt cuplate la surse.

$$\left.\begin{aligned} X_e = 0 \leftrightarrow \frac{\partial W_e}{\partial x} = 0 \rightarrow \begin{cases} (W_e)_{min} \text{ sisteme decuplate} \\ (W_e)_{max} \text{ sisteme cuplate la surse} \end{cases} \\ X_m = 0 \leftrightarrow \frac{\partial W_m}{\partial x} = 0 \rightarrow (W_m)_{max} \text{ circuite cuplate la surse} \end{aligned}\right\} \quad (7.52)$$

Este de altfel evident că un sistem electric astfel acționează asupra corpurilor încât să crească capacitatea electrică C a sistemului:

$$C_{max} \rightarrow \begin{cases} \text{decuplat}: (W_e)_{min} = \dfrac{q^2}{2C} \\ \text{cuplat}: (W_e)_{max} = \dfrac{1}{2} C u^2 \end{cases}$$

Un sistem magnetic acționează în sensul *creşterii inductivităţii* L a sistemului, ceea ce înseamnă $L_{max} \rightarrow (W_m)_{max} = \frac{1}{2} L i^2$.

Observaţii: **1**. Forțele ce se exercită prin intermediul câmpului magnetic, în funcție de mărimile care interacționează, au următoarele denumiri:

- *forțe electrodinamice*: forțe ce se exercită între două circuite(sau bobine) parcurse de curenți(forțe de tip Ampère).
- *forțe electromagnetice***:** forțe ce le exercită un circuit parcurs de curent asupra unui corp magnetic(armătură); de exemplu forța de atracție a unui miez în interiorul unei bobine
- *forțe magnetoelectrice*(forțe de tip Laplace): forța cu care un câmp magnetic exterior de inducție $\bar{B}_{ext}$ acționează asupra unui circuit parcurs de curent sau interacțiunea dintre câmpul magnetic inductor şi curentul indus.
- *forțe magnetostatice*: interacțiunea dintre doi magneți permanenți.
- *forțe magnetice*(de tip Lorentz): forța cu care un câmp $\bar{B}$ acționează asupra particulelor încărcate cu sarcină când se mişcă în interiorul câmpului magnetic.

2. Forțele pe care le exercită câmpul electric sau magnetic asupra corpurilor se distribuie cu o densitate de volum asupra substanței corpului. Densitățile de volum ale forței electrice, respectiv magnetice au expresiile(τ - densitatea de masă):

$$\begin{cases} \bar{f}_{ev} = \rho_v \bar{E} - \dfrac{1}{2} E^2 \operatorname{grad}\varepsilon + \dfrac{1}{2} \operatorname{grad}\left(E^2 \dfrac{d\varepsilon}{d\tau} \tau \right) \\ \bar{f}_{mv} = \left(\bar{J} \times \bar{B} \right) - \dfrac{1}{2} H^2 \operatorname{grad}\mu + \dfrac{1}{2} \operatorname{grad}\left(H^2 \dfrac{d\mu}{d\tau} \tau \right) \end{cases} \quad (7.53)$$

Termenii care apar în (7.53) se interpretează ca fiind diferite forme de acțiune a câmpului electromagnetic asupra corpurilor.

- $\left(\rho_v \bar{E}\right)$ - densitatea forţei exercitată de câmpul exterior $\bar{E}$ asupra corpurilor încărcate cu sarcină ρ_v .Forţa rezultantă este $\bar{F} = \int_{v_{corp}} \rho_v \bar{E} dv \xrightarrow[v<<]{} \bar{F} = q\bar{E}$.

  O sarcină nu interacţionează cu propriul câmp electric.
- $\left(\bar{J} \times \bar{B}\right)$ - densitatea forţei exercitate de câmpul exterior $\bar{B}$ asupra corpurilor parcurse de curent $\bar{J}$. Forţa rezultantă este: $\bar{F} = \int_{v_{cond}} \left(\bar{J} \times \bar{B}\right) dv = i \oint_{\Gamma} \left(\bar{dl} \times \bar{B}\right)$ -forţa de tip Laplace. Un curent $\bar{J}$ nu interacţionează cu propriul său câmp magnetic, în mediu omogen.
- $\left(-\frac{1}{2} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon\right)$ şi $\left(-\frac{1}{2} H^2 \operatorname{grad} \mu\right)$ - densităţile forţelor datorate neomogenităţilor permitivităţii ε şi permeabilităţii μ. Cum (-grad ε) are sensul scăderii lui ε, aceste forţe sunt îndreptate dinspre regiunile cu ε mare spre cele cu ε mic; la fel şi componenta magnetică de la μ mare, la μ mic.
- $\left[\frac{1}{2} \operatorname{grad}\left(E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau} \tau\right)\right]$ şi $\left[\frac{1}{2} \operatorname{grad}\left(H^2 \frac{d\mu}{d\tau} \tau\right)\right]$-densităţile forţelor de *electrostricţiune* şi *magnetostricţiune*; aceste forţe solicită local materialul creând tensiuni interne şi deformaţii mecanice interne, dar aduc o contribuţie nulă la forţa rezultantă ce se exercită asupra unui corp plasat în aer (vid).

3. Forţele electrice şi cele magnetice sunt $X_e = \frac{dW_e}{dx}; X_m = \frac{dW_m}{dx}$ şi la aceeaşi deplasare dx, forţele vor fi egale dacă $dW_e = dW_m$. La aceleaşi dimensiuni geometrice, dispozitivul electric şi cel magnetic trebuie să aibă aceeaşi densitate de energie:

$$w_e' = w_m' \rightarrow \frac{B^2}{2\mu_o} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 \rightarrow \frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} \approx 3 \cdot 10^8$$

Dacă în câmp magnetic se poate concentra până la o inducţie având $B \approx 1T$, în câmp electric va fi nevoie de un câmp având $E \approx 3 \cdot 10^8 \, V/m$, câmp la care toate materialele sunt străpunse.

Deci câmpul magnetic este capabil *să concentreze în volum mic energii şi forţe mari*, motiv pentru care majoritatea dispozitivelor electromagnetice(maşini electrice, contactoare, electromagneţi, etc) acţionează prin intermediul câmpului magnetic. Dispozitivele magnetice au volum mic dar greutate mare, din cauza miezurilor magnetice utilizate. Interacţiunea prin câmp electric necesită suprafeţe active mari ale corpurilor, chiar dacă greutăţile lor n-ar fi prea mari, dar ar trebui alimentate cu tensiuni înalte.

7.6 Aplicații

1. Să se determine forța ce se exercită asupra unui bloc dielectric de permitivitate ε introdus între armăturile unui condensator plan ca în figura 7.10.

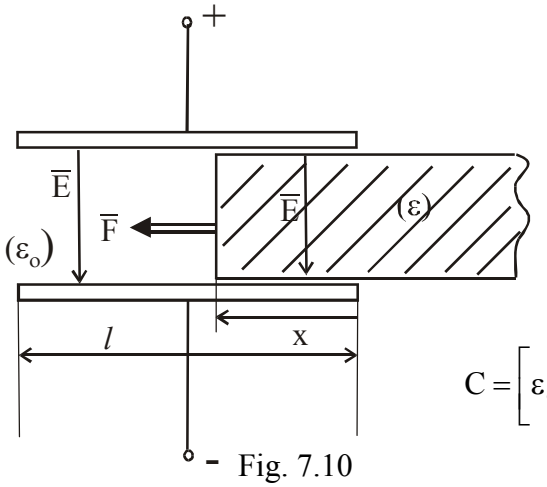


Fig. 7.10

Armăturile condensatorului au aria A=h*l* iar blocul dielectric îl presupunem introdus parțial pe distanța x şi studiem ce se întâmplă cu el. În această poziție capacitatea electrică a condensatorului este:

$$C = \left[\varepsilon_o \frac{h(l-x)}{d} + \varepsilon \frac{hx}{d} \right] \quad (7.54)$$

a)Admitem condensatorul încărcat cu $\pm q_o$ şi decuplat de la sursă: ($W_e = \frac{q_o^2}{2C}$). Cum coordonata x este o deplasare liniară, forța generalizată X_e este o forță F pe direcția coordonatei x:

$$X_e = F = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_q = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q_o^2}{2C}\right) = \frac{q_o^2 h}{2d} \frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\left[\varepsilon_o \frac{h(l-x)}{d} + \varepsilon \frac{hx}{d}\right]^2} > 0 \quad (7.55)$$

Cum F>0, ea va duce la creşterea lui x, deci atragerea blocului dielectric între armături; aceasta duce la creşterea capacității C iar energia $W_e = \frac{q_o^2}{2C}$ va scădea. Echilibrul se obține pentru un $(W_e)_{min} = \frac{q_o^2}{2C_{max}}$; blocul intră complet între armături iar dacă lungimea sa este mai mică decât *l*, el se va opri în zona centrală a condensatorului.

b) Admitem condensatorul cuplat la o sursă de tensiune U; energia sistemului este $W_e = \frac{1}{2}CU^2$ iar forța o calculăm astfel:

$$X_e = F = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_U = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}CU^2\right) = \frac{1}{2}U^2 \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2}U^2 \frac{h}{d}(\varepsilon - \varepsilon_o) > 0 \quad (7.56)$$

Expresia (7.56) este aceeaşi cu expresia (7.55).

Cum întotdeauna $\varepsilon > \varepsilon_o$ forţa este (+), deci duce le creşterea coordonatei x şi va atrage blocul între armături. Creşterea lui C duce la $(W_e)_{max} = \frac{1}{2} C_{max} U^2$ şi în acest caz(sistem cuplat la sursă) echilibrul se realizează într-un maxim al funcţionalei de energie. În ambele situaţii, sistemul duce la C_{max}.

2. Să se determine forţa pe care o exercită o bobină cilindrică cu N spire asupra unui miez magnetic cu *permeabilitatea* μ (figura 7.11).

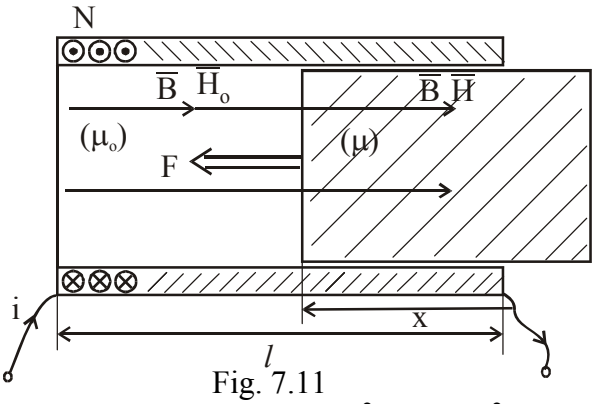


Fig. 7.11

Admitem că blocul cu permeabilitatea μ este introdus parţial pe distanţa x şi studiem ce forţă va exercita câmpul magnetic asupra sa. Privind bobina ca o bobină cu miez, scriem inductivitatea sa sub forma:

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2}{\frac{l-x}{\mu_o A} + \frac{x}{\mu A}} = \frac{N^2 \mu_o A}{l - x\left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right)} \tag{7.57}$$

Aici nu putem considera că avem două bobine în serie (cum în problema precedentă erau două condensatoare în paralel), fiindcă bobina cu aer de lungime (*l*-x) este cuplată magnetic cu cea având lungimea x, deci $L \neq L_1 + L_o$.

Calculăm forţa generalizată asupra miezului cu ambele teoreme ale forţelor generalizate:

$$\begin{cases} W_m = \dfrac{\Phi^2}{2L} \rightarrow X_m = F = -\left(\dfrac{\partial W_m}{\partial x}\right)_\Phi = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\Phi^2}{2L}\right) = \dfrac{\Phi^2}{2L^2}\dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{1}{2} i^2 \dfrac{\partial L}{\partial x} \\ W_m = \dfrac{1}{2} L i^2 \rightarrow X_m = F = \left(\dfrac{\partial W_m}{\partial x}\right)_i = \dfrac{1}{2} i^2 \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{L^2 i^2}{2N^2 \mu_o A}\left(1 - \dfrac{1}{\mu_r}\right) \end{cases} \tag{7.58}$$

Dacă $\mu > \mu_o (\mu_r > 1)$ atunci F>0 şi duce la creşterea lui x, respectiv creşterea lui L iar W_m tinde spre un maxim.

Daca $\mu < \mu_o (\mu_r < 1, \text{material diamagnetic})$ atunci F<0, duce la scăderea lui x, blocul este respins afară de către bobină şi aceasta duce la creşterea lui L şi W_m tot spre maxim tinde (maximul se atinge la x=0).

3. Forța portantă a unui electromagnet

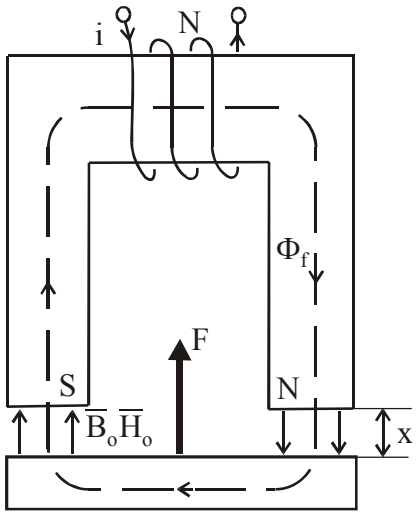


Fig. 7.12

Un electromagnet format dintr-un miez magnetic de permeabilitate μ şi geometria din fig. 7.12 are o bobină cu N spire parcurse de curentul i.

Coordonata generalizată este distanța x dintre armătură şi polii electromagnetului. Să se determine forța de atracție (forța portantă) asupra armăturii.

Conform cu relația (7.51) forța ce acționează asupra armăturii este:

$$X_m = F = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Bobina fiind aşezată pe un miez magnetic, inductivitatea bobinei o vom evalua în funcție de reluctanța miezului:

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2}{R_{m_f} + R_{m_o}} = \frac{N^2}{\frac{l_f}{\mu A} + \frac{2x}{\mu_o A}} = \frac{N^2 \mu_o A}{\frac{l_f}{\mu_r} + 2x} \qquad (7.59)$$

unde l_f este lungimea liniei mijlocii de flux prin miez(fier) şi l_o=2x este lungimea sa prin aer.

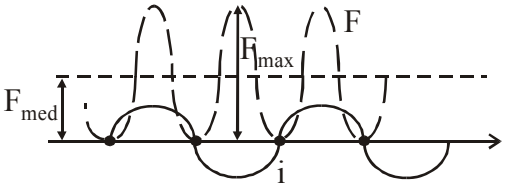
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2 \frac{N^2 \mu_o A}{\left(\frac{l_f}{\mu_r} + 2x \right)^2} = \frac{-2L^2}{N^2 \mu_o A} < 0 \qquad (7.60)$$

Forța de atracție dintre armături este:

$$F = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{L^2 i^2}{N^2 \mu_o A} = -\frac{\Phi_f^2}{\mu_o A} < 0 \qquad (7.61)$$

Forța fiind (-), ea duce la scăderea coordonatei x, respectiv atragerea armăturii; forța fiind proporțională cu i^2 rămâne forță de atracție indiferent

de sensul curentului prin bobină. Dacă bobina este alimentată cu un curent sinusoidal $i = I_m \sin \omega t$ forţa va fi de forma:



$F = F_{max} \sin^2 \omega t$, fiind o forţă variabilă în timp cu o valoare medie ca în figura 7.13. Fig. 7.13

Forţa este variabilă ca un $\sin^2 \omega t$, va produce o vibraţie a armăturii pe frecvenţa (2ω). Pentru a elimina aceste vibraţii există mai multe metode tehnice (electromagnet trifazat, ecranarea polului cu o spiră în scurtcircuit, etc) toate variantele au în vedere eliminarea posibilităţilor ca forţa să treacă prin zero, cum era în figura 7.13.

Forţa specifică, raportată la unitatea de arie a polului, este:

$$f_s = \frac{|F|}{2A} = \frac{1}{2\mu_o}\left(\frac{\Phi}{NA}\right)^2 = \frac{B_o^2}{2\mu_o} = \frac{1}{2}\mu_o H_o^2 = w'_m \qquad (7.62)$$

cu atât mai mare cu cât densitatea de energie magnetică a câmpului dintre poli şi armătură este mai mare. Inducţia magnetică pentru miezuri din tole are valori $B \in (1,\ldots 1{,}5)\,T$ iar pentru miezuri din ferite $B \in (0{,}4 \ldots 0{,}6)\,T$, admitem $B \cong 1T$ şi în acest caz forţa specifică care se poate crea sub polul unui electromagnet este:

$$f_s = \frac{B^2}{2\mu_o} = \frac{1}{8\pi 10^{-7}} \approx 4 \cdot 10^5 \, N/m^2 = 4 \, atm.$$

Forţa de atracţie (7.61) nu este constantă pe timpul mişcării, ea depinde de x ca în figura 7.14. Armătura este reţinută la depărtarea maximă x_M de un resort elastic iar când este atrasă, depărtarea minimă este $x_m \approx 0$.

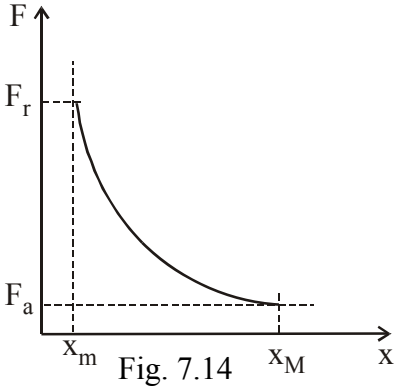


Fig. 7.14

Pentru $x = x_M$ forţa are valoarea F_a numită *forţă de acţionare,* care trebuie să fie suficientă pentru a pune în mişcare armătura (cu contactele mobile ale releului sau contactorului care sunt ataşate de ea) iar la sfârşit forţa este F_r numită *forţă de reţinere* (figura 7.14), capabilă să menţină armătura lipită de poli.

4. Într-un mediu omogen cu permitivitate ε se suprapun două câmpuri electrice $\overline{E}_1$ şi $\overline{E}_2$ sub un unghi α. Să se determine densitatea de energie w'_e a câmpului electric rezultant.

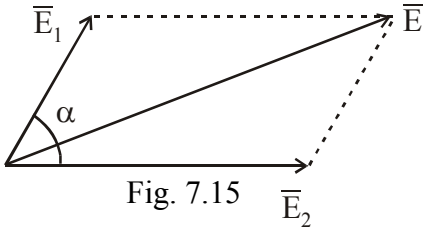


Fig. 7.15

Câmpurile se compun vectorial (figura 7.15):

$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2$$

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha$$

Densitatea de energie electrică a lui E este:

$$w'_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon E_2^2 + \varepsilon E_1E_2\cos\alpha \qquad (7.63)$$

- $\frac{1}{2}\varepsilon E_1^2$ este densitatea de energie dacă ar exista doar $\overline{E}_1$
- $\frac{1}{2}\varepsilon E_2^2$ densitatea de energie dacă ar exista doar $\overline{E}_2$
- $\varepsilon E_1E_2\cos\alpha$ densitatea energiei de interacţiune dintre cele două câmpuri $\overline{E}_1$ şi $\overline{E}_2$

Densitatea $w'_{int\,er}$ este maximă dacă $\alpha = 0$ sau π (câmpuri paralele sau antiparalele) şi este nulă când câmpurile sunt ortogonale $\left(\overline{E}_1 \perp \overline{E}_2\right)$ şi $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Se observă că $w'_e \neq w'_{e_1} + w'_{e_2}$, deci la compunerea câmpurilor energiile nu sunt adiţionale.

5. Să se determine parametrii L şi C pentru o linie bifilară formată din două fire paralele de rază „a" aflate la distanţa D. Ce forţă se exercită între ele?

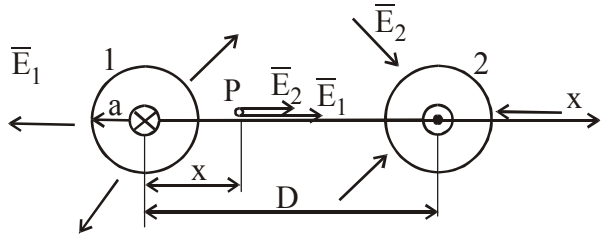


Fig. 7.16

a) Firul 1 este fir de dus iar firul 2 este fir de întors; în model electrostatic ele se consideră încărcate cu $+\rho_l$, respectiv $-\rho_l$.

Într-un punct P(x) din figura 7.16 câmpul electric are expresia:

$$E(x) = E_1 + E_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}\right) \qquad (7.64)$$

Tensiunea între cele două fire, calculată de-a lungul axei x, este:

$$U = \int_1^2 \bar{E}\,\bar{dl} = \int_a^{D-a} \frac{q}{2\pi\varepsilon l}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}\right)dx = \frac{q}{\pi\varepsilon l}\ln\frac{D-a}{a}$$

Cum D>>a, capacitatea între cele două fire este:

$$C = \frac{q}{U} \approx \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{D}{a}} \tag{7.65}$$

Energia electrică acumulată în câmpul electric dintre fire este $W_e = \frac{1}{2}CU^2$; coordonata generalizată o considerăm distanța D, deci forța electrică ce se exercită între fire este:

$$F = \frac{\partial W_e}{\partial D} = \frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial D} = -\frac{U^2}{2}\frac{\pi\varepsilon l}{D\cdot\ln^2\frac{D}{a}} < 0$$

Fiind forță negativă, ea ar duce la micşorarea lui D deci, atracție între fire.

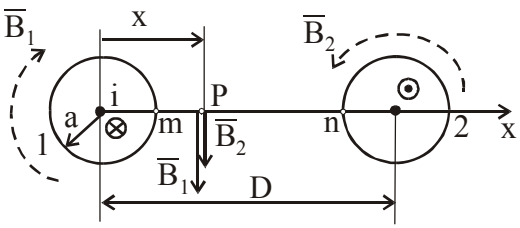


Fig. 7.17

b) Firul de dus 1 şi cel de întors 2 parcurse de curentul i creează în jurul lor câmpurile magnetice $\bar{B}_1$ şi $\bar{B}_2$. Câmpul rezultant în punctul P(x) are expresia:

$$B(x) = B_1 + B_2 = \frac{\mu i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}\right) \tag{7.66}$$

Fluxul exterior (prin suprafața cuprinsă între punctele m şi n din figura 7.17 este:

$$\Phi_{ext} = \int_a^{D-a} B(x)\,l\,dx = \frac{\mu i l}{\pi}\ln\frac{D-a}{a} \rightarrow L \approx L_{ext} = \frac{\Phi_{ext}}{i} \cong \frac{\mu l}{\pi}\ln\frac{D}{a} \tag{7.67}$$

Forţa magnetică ce se exercită între fire este:

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial D} = \frac{1}{2}i^2\frac{\partial L}{\partial D} = \frac{1}{2}\frac{\mu l i^2}{\pi D} > 0$$

Forța magnetică fiind (+) va duce la creşterea coordonatei D, deci firele se resping.

Observaţie: Dacă C_s şi L_s sunt parametrii specifici ai liniei (pentru *l*=1m), se observă că $\sqrt{L_s C_s} = \sqrt{\varepsilon\mu}$, deci viteza de propagare a unei unde *electromagnetice* pe o linie bifilară este aceeaşi ca la propagarea unei unde printr-un mediu cu (ε, μ), cum este cel din jurul liniei bifilare:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}} \tag{7.68}$$

8. Corpuri conductoare în câmpuri variabile

Câmpul electromagnetic în medii conductoare se studiază neglijând densitatea curentului de deplasare în raport cu densitatea curentului de conducție, în valori efective:

$$\left.\begin{aligned}\bar{J}\text{cond} = \sigma\bar{E} \rightarrow J\text{cond}_{ef} = \sigma E \\ \bar{J}\text{depl} = \varepsilon\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} \rightarrow J\text{depl}_{ef} = \omega\varepsilon E\end{aligned}\right\} \rightarrow \omega\varepsilon << \sigma \longleftrightarrow \omega << \frac{\sigma}{\varepsilon} \simeq 10^{16} \qquad (8.1)$$

respectiv ipoteza rămâne valabilă dacă frecvența undei electromagnetice (sau a curentului) îndeplinește condiția (8.1), condiție care pentru frecvențele care se pot produce în actualele condiții tehnice este îndeplinită; deci în medii conductoare se neglijează curentul de deplasare.

În regim staționar (cvasistaționar) liniile curentului se repartizează uniform pe secțiune $\left(J = \frac{i}{S} = ct\right)$,circuitul este *filiform.* Ecuațiile satisfăcute de câmp în medii conductoare au forma (4.12) ecuații ale difuziei, respectiv:

$$\Delta\bar{H} = \sigma\mu\frac{\partial\bar{H}}{\partial t}; \quad \Delta\bar{E} = \sigma\mu\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}; \quad \Delta\bar{J} = \sigma\mu\frac{\partial\bar{J}}{\partial t} \ldots \qquad (8.2)$$

Soluția acestor ecuații pune în evidență "difuzia" câmpului electromagnetic într-o piesă conductoare,câmpul pătrunde şi se amortizează pe măsură ce înaintează în grosimea piesei conductoare.

8.1 Pătrunderea câmpului electromagnetic în semispațiul conductor infinit extins

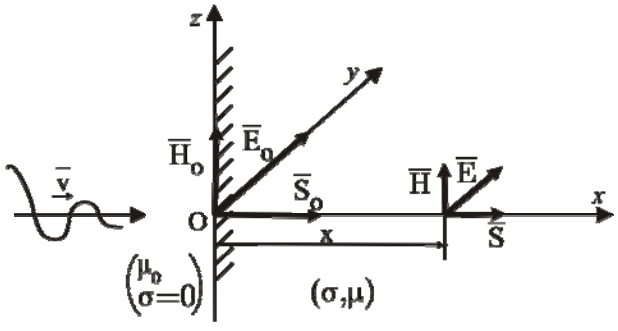


Fig 8.1

O undă plană având componentele $\bar{E}=\bar{j}E$ şi $\bar{H}=\bar{k}H$ înaintează în lungul axei Ox şi cade pe suprafața plană a unei piese conductoare considerată infinit extinsă si conținută în planul yOz. Valorile câmpului la intrare sunt $\bar{E}_o$ şi $\bar{H}_o$. Să studiem pătrunderea undei

magnetice în piesa conductoare. Partea magnetică a undei are la pătrundere componentele:

$$\begin{cases} \bar{H} = \bar{H}(x,t) = \bar{k}H_Z(x,t) \\ H_Z(0,t) = H_o(t) = H_{om}\sin\omega t \end{cases} \tag{8.3}$$

În regim permanent sinusoidal ecuația difuziei (8.2) se transpune în complex sub forma:

$$\Delta\dot{\bar{H}} = \sigma\mu\frac{\partial\dot{\bar{H}}}{\partial t} \leftrightarrow \frac{d^2\underline{H}_Z}{dx^2} = j\omega\sigma\mu\underline{H}_Z \leftrightarrow \frac{d^2\underline{H}_Z}{dx^2} = \underline{\gamma}^2\underline{H}_Z \tag{8.4}$$

$$\text{unde: } \underline{\gamma}^2 = j\omega\sigma\mu \xrightarrow[\sqrt{j}=e^{j\frac{\pi}{4}}=\frac{1+j}{\sqrt{2}}]{} \underline{\gamma} = \sqrt{j\omega\sigma\mu} = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}(1+j) = \alpha(1+j) \tag{8.5}$$

$\underline{\gamma} = \alpha+j\alpha$ este *constanta de propagare* a câmpului prin spațiul conductor; partea reală (α) este *constanta de atenuare* a câmpului [Np], iar partea imaginară (α) este *constanta de defazare* [rad]($\underline{\gamma} = \alpha+j\alpha = \alpha\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}$)

Soluția ecuației (8.4) este de forma:

$$\underline{H}_Z = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} = \underline{H}_o e^{-\underline{\gamma}x} = \frac{\underline{H}_{om}}{\sqrt{2}} e^{-\alpha x}\cdot e^{-j\alpha x} \tag{8.6}$$

unde am admis că piesa conductoare este infinită în lungul axei Ox, deci nu va exista undă reflectată (undă inversă), deci $\underline{A}_2 = 0$, iar condiția la limită este de tipul (8.3).

În valori instantanee, expresia undei magnetice (8.6) se scrie astfel:

$$H_Z(x,t) = H_{om}e^{-\alpha x}\cdot\sin(\omega t-\alpha x) \tag{8.7}$$

Cum:

$$\bar{J} = \text{rot}\,\bar{H} \rightarrow \underline{J} = \underline{J}_y = -\frac{\partial\underline{H}_z}{\partial x} = \underline{\gamma}\underline{H}_o e^{-\underline{\gamma}x} = \alpha H_{om}\, e^{-\alpha x}\cdot e^{-j(\alpha x-\frac{\pi}{4})} \tag{8.8}$$

$$J_y(x,t) = \sqrt{2}\alpha H_{om}e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \alpha x+\frac{\pi}{4}) \tag{8.9}$$

Expresia undei electrice prin spațiul conductor este de forma :

$$E_y(x,t) = \rho J_y(x,t) = \left[\sqrt{2}\frac{\alpha}{\sigma}H_{om}e^{-\alpha x}\right]\cdot\sin(\omega t-\alpha x+\frac{\pi}{4}) \tag{8.10}$$

respectiv $H_Z(x,t)$ este defazat în urma lui $E_y(x,t)$, aşa cum $\underline{I}$ este în urma lui $\underline{U}$ la un circuit cu caracter inductiv.

Impedanța de undă a mediului conductor este :

$$\underline{Z}=\frac{\underline{E}}{\underline{H}}=\frac{\sqrt{2}\alpha}{\sigma}e^{j\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{j\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+j) \tag{8.11}$$

Vectorul Poynting la intrarea în spațiul conductor are valoarea :

$$\bar{\underline{S}}_o = \frac{1}{2}(\bar{\underline{E}}_o\times\bar{\underline{H}}_o^*) = \bar{i}\frac{1}{2}\underline{E}_o\underline{H}_o^* = \bar{i}\sqrt{2}\frac{\alpha}{\sigma}H_{om}^2 = \bar{i}\,S_o \tag{8.12}$$

iar într-un punct la adâncimea x în interiorul conductorului (figura 8.1) va fi

$$\bar{\underline{S}} = \frac{1}{2}(\bar{\underline{E}}\times\bar{\underline{H}}^*) = \bar{i}\frac{1}{2}\underline{E}\cdot\underline{H}^* = \bar{i}\sqrt{2}\frac{\alpha}{\sigma}H_{om}^2e^{-2\alpha x} = \bar{i}\,S \tag{8.13}$$

$$S_x(x,t) = \sqrt{2}\frac{\alpha}{\sigma}H_{om}^2e^{-2\alpha x}\sin(\omega t-\alpha x)\cdot\sin(\omega t-\alpha x+\frac{\pi}{4}) =$$

$$= \frac{\alpha}{\sigma}\frac{H_{om}^2}{\sqrt{2}}e^{-2\alpha x}\left[\cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(2\omega t - 2\alpha x+\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{8.14}$$

Valoarea medie a vectorului Poynting, la $x = 0$, este :

$$\widetilde{S_o(0,t)} = \frac{\alpha}{\sigma}\frac{H_{om}^2}{2} = \frac{\alpha}{\sigma}H_o^2 \quad ; \quad \widetilde{S_x(x,t)} = \frac{\alpha}{\sigma}H_o^2e^{-2\alpha x} \tag{8.15}$$

Puterea activă care pătrunde în spațiul conductor este :

$$P_o = \widetilde{S_o(0,t)}\cdot A_{lat} = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\sigma}H_{om}^2\cdot A_{lat} \tag{8.16}$$

iar curenții induşi în spațiul conductor vor avea expresia :

$$J = J_y = \sqrt{2}\alpha H_{om}e^{-\alpha x}\sin\left(\omega t - \alpha x+\frac{\pi}{4}\right) \;;\; J_{om} = \sqrt{2}\alpha H_{om} \tag{8.17}$$

cu o repartiție pe axa Ox ca în figura 8.2.

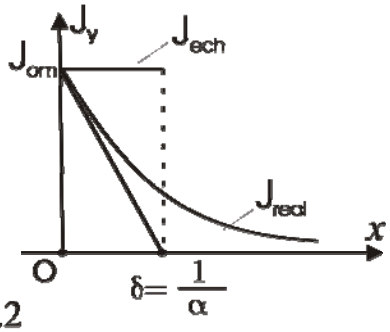


Fig 8.2

Atenuarea curenților induşi este $\alpha=\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$, care este foarte pronunțată la frecvențe mari.La frecvențe înalte, funcția J(x) fiind puternic amortizată, se admite că am avea un curent repartizat cu aceeaşi valoare ca la suprafața piesei conductoare (J_{om}) pe o adâncime $\delta = \frac{1}{\alpha}$ numită *adâncime de pătrundere*, aria de sub graficul

real al funcției $J = J_{om}e^{-\alpha x}$ și cel al repartiției uniforme la suprafață $(J_{om} \cdot \delta)$ are aceeași valoare.

8.2 Efectul de refulare

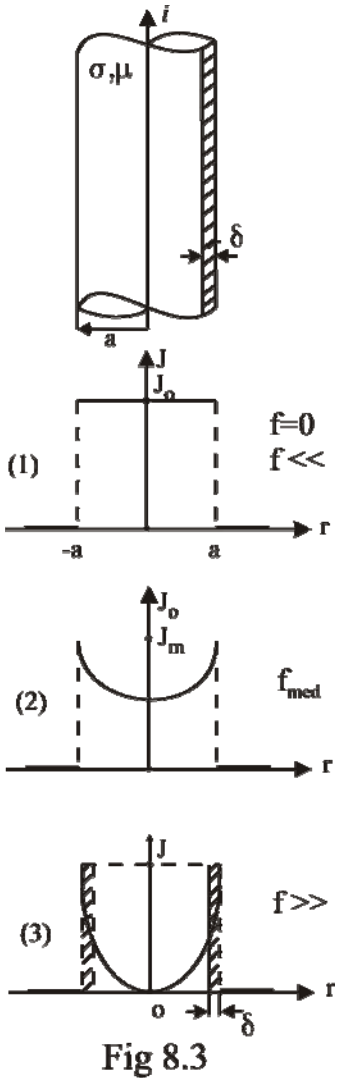


Fig 8.3

Un conductor cilindric cu parametrii constitutivi (σ,μ) este parcurs de un curent variabil $i = I_m \sin \omega t$.

Repartiția liniilor de curent pe secțiunea conductorului depinde în principal de frecvența curentului (ω) ca în figura 8.3. Există posibilitățile:

(1) dacă curentul este continuu $(\omega = 0)$ sau de joasă frecvență, el se repartizează uniform pe secțiunea conductorului cu densitatea: $J_o = \frac{i}{A} = \frac{i}{\pi a^2}$, iar rezistența firului este: $R_o = \frac{l}{\sigma A}$.

(2) dacă frecvența este medie, repartiția curentului are loc după legea $J = J_m e^{-\alpha x}$, plecând de la suprafață spre interior. În centru densitatea curentului este mică iar rezistența firului crește, R_a se numește *rezistența în alternativ* a conductorului ($R_a > R_o$).

(3) dacă frecvența este mare, atenuarea lui J este pronunțată. Practic în centrul firului nu circulă curent, la suprafață densitatea este foarte mare, firul se încălzește puternic la exterior. Curentul îl putem considera concentrat într-o peliculă de grosime δ la suprafața sa ca în figura 8.3. De exemplu, dacă printr-un fir de cupru($\sigma = 57 \cdot 10^6 \, \Omega^{-1}/\mathrm{m}$) cu raza $a = 6$ mm trece un curent sinusoidal de frecvență $f = 2500$ Hz, atunci raportul dintre densitatea de curent $\underline{J}(r)$ si densitatea $\underline{J}_o$ la o repartiție

uniformă ($\underline{J}_o = \frac{\underline{I}}{\pi a^2}$) considerată în centrul conductorului este: $\underline{J}/\underline{J}_o = 0{,}804e^{-j68^o}$ iar la periferia conductorului ($r = a$) aceasta devine: $\underline{J}/\underline{J}_o = 1{,}726e^{j37^o}$ (coeficientul de atenuare este $\alpha = 750$).

Cum $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$, la $\omega >>$, adâncimea de pătrundere (de refulare) δ va fi foarte mică, curentul circulă doar pe pelicula de grosime δ (de unde numele de *efect pelicular (efect skin)*).Dacă $\delta << a$ se apreciază că avem un *efect pelicular pronunțat* (efect pelicular net). Contează deci şi grosimea (raza a) a conductorului dar în principal contează frecvența.

O bară conductoare poate fi *filiformă* ($J \simeq$ constant pe secțiune) în curent continuu şi joasă frecvență iar o liță subțire este *masivă* în înaltă frecvență.

Cum în înaltă frecvență curentul circulă doar la suprafața firului conductor, conductorul poate fi ca o țeavă prin care poate circula agentul de răcire a conductorului.

Conductoarele utilizate în înaltă frecvență nu se realizează dintr-un singur conductor gros la care curentul ar fi refulat la exteriorul său, ci sub forma unei împletituri din mai multe conductoare subțiri (lițe), ceea ce permite ca să existe curent şi în centrul conductorului (figura 8.4-a).

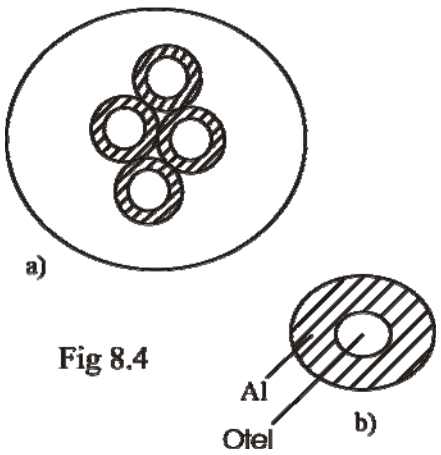


Fig 8.4

Funiile pentru liniile de înaltă tensiune fiind de secțiune mai mare, chiar la $f = 50$ Hz, se manifestă efectul de refulare. Ele se realizează dintr-o inimă de oțel care îi asigură o rezistență mecanică (la vânt, încărcare cu chiciură, etc) iar în jurul acesteia există o împletitură din fire de aluminiu (figura 8.4-b) care conduc curentul şi a cărei grosime este egală cu adâncimea de refulare δ.

8.3 Efectul de pătrundere

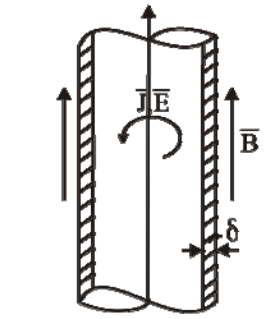
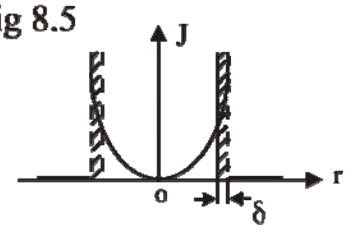


Fig 8.5



O piesă conductoare cilindrică este introdusă într-un câmp magnetic inductor $\overline{B}$ ale cărui linii să fie tangente la suprafața piesei şi este variabil în timp sub forma: $B=B_m \sin\omega t$.

Câmpul $\overline{B}(t)$ induce în conductor un *câmp electric indus* $\overline{E}$ ale cărui linii sunt situate în plane $\perp$ pe $\overline{B}$ (ca în figura 8.5). Câmpul $\overline{E}$ generează *curenții induşi* $\overline{J} = \sigma\overline{E}$ ale căror linii coincid cu cele a lui $\overline{E}$ (curenții $\underline{J}$ se mai numesc şi *curenți turbionari* sau *curenți Foucault,* tocmai fiindcă liniile lor fac turbioane (rotoare) în volumul piesei conductoare.

Dacă frecvența câmpului $\overline{B}$ este mică, curenții induşi vor exista până aproape de centrul conductorului iar dacă $\omega \gg$, curenții induşi sunt puternic amortizați spre interior, ei practic "pătrund" în conductor doar într-o peliculă de grosime δ la suprafață (de unde numele pentru δ de *adâncime de pătrundere*).

Fenomenul este utilizat în tehnica *tratamentelor termice* de suprafață (călire) pentru a se obține efecte speciale (duritate mare a piesei la suprafață, pentru a nu se uza). Se introduce piesa în interiorul bobinei inductoare (cea care creează câmpul $\overline{B}$) şi în câteva secunde se înroşeşte la suprafață; se scoate şi se răceşte în mediul dorit (apă, cianură etc). Randamentul este foarte bun (comparat cu încalzirea în cuptoare cu gaz sau altele), se încălzeşte doar suprafața piesei, proprietățile structurii interioare nu sunt afectate prin încălzire.

Totul este să se poată produce un câmp magnetic ale cărui linii să fie tangente la suprafața piesei iar când piesa are o formă mai complicată trebuie să avem bobine inductoare speciale.Alimentarea acestor bobine se face de la generatoare de înaltă frecvență (GIF).

8.4 Efectul de proximitate (vecinătate)

Curentul variabil printr-un conducor se repartizează pe secțiunea acestuia în funcție de frecvența sa ca urmare a efectului de refulare (spre exterior) a liniilor de curent. De fapt liniile de curent sunt refulate spre regiunea din conductor unde câmpul său magnetic este maxim; şi cum la un

conductor singur câmpul magnetic este maxim la suprafața sa, acolo are loc refularea liniilor de curent.

Dacă în vecinătatea unui conductor se găsesc şi alte conductoare parcurse de curent variabil (fie de aducție, fie indus în ele) câmpul magnetic al conductoarelor vecine modifică repartiția câmpului magnetic inițial şi refularea va avea loc spre regiunea cu câmp maxim H_{max}.

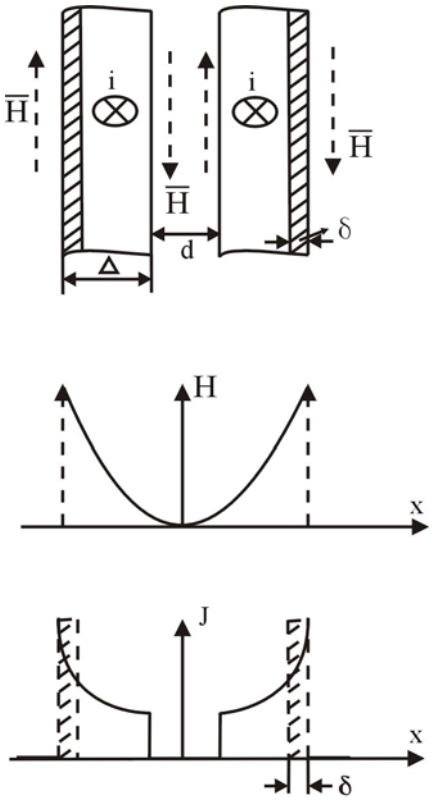


Fig 8.6

În zona interioară plăcilor conductoare din figura 8.6, cele două câmpuri magnetice au sensuri contrare, deci câmpul H va avea valori mari pe partea exterioară şi acolo va avea loc refularea liniilor celor doi curenți. La frecvențe mari ei se pot considera concentrați pe o peliculă de grosimea δ la exteriorul plăcilor. Similar, pentru două conductoare paralele cu secțiune circulară, parcurse de curentul i de înaltă frecvență, efectul de refulare are loc ca în figura 8.7.

În figura 8.7-a curenții au acelaşi sens, în zona centrală câmpurile $\overline{H}$ au sensuri contrarii, câmpul maxim este la exterior iar curenții vor fi refulați spre exterior, ei circulă prin secțunile haşurate.

În figura 8.7-b curenții au sensuri contrarii, câmpul magnetic este maxim în zona interioară şi curenții vor fi refulați spre interior; ei vor circula doar prin secțiunea haşurată, cu atât mai îngustă cu cât frecvența este mai mare.

Fig 8.7

8.5 Efectul de buclă

Fie o spiră groasă dintr-o bobină parcursă de un curent de înaltă frecvență. Câmpul magnetic este maxim în zona interioară, deci acolo va avea loc şi refularea liniilor de curent, prin secțiunea haşurată din figura 8.8.

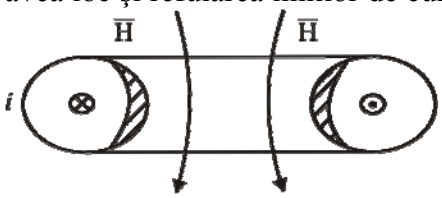


Fig 8.8

Aceasta determină încălzirea spirelor pe partea interioară, acolo unde sunt condiții grele de răcire a acestora (excepție cazul spirelor realizate cu conductor țeavă parcurs de un agent de răcire). Dacă bobina este un inductor care trebuie să încălzească piesele din interiorul său, în acest caz încălzirea spirelor la interior va îmbunătății condițiile de transfer a energiei spre interior.

8.6 Efectul Field (direct şi invers)

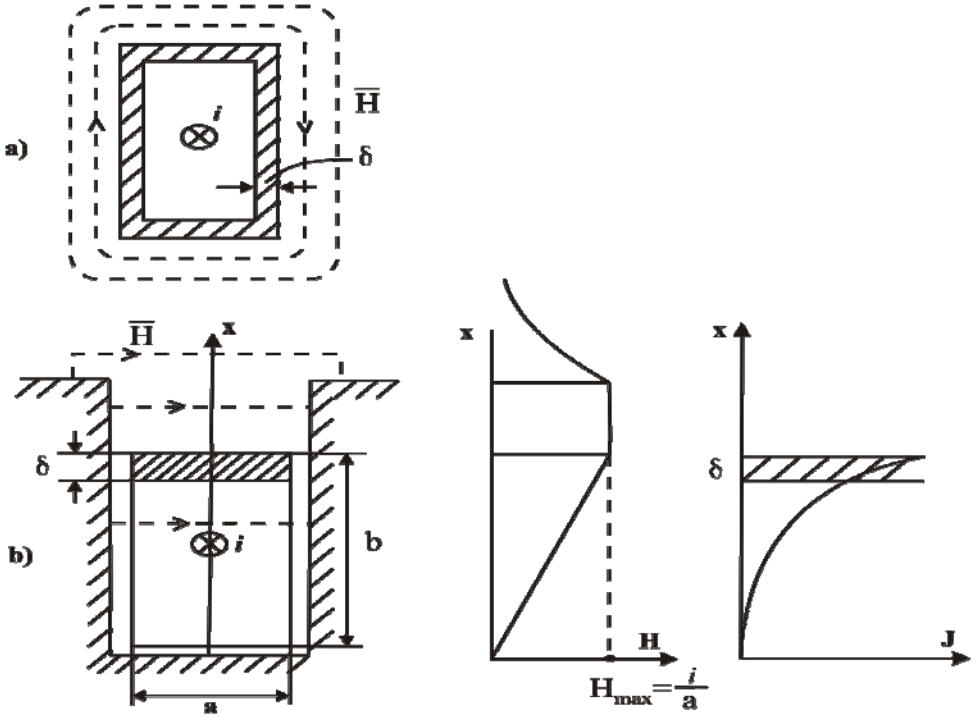


Fig 8.9

Dacă o bară conductoare este plasată într-un mediu omogen $(\mu = ct)$ şi este parcursă de un curent variabil i(t) ca în figura 8.9-a, la frecvențe mari va avea loc o refulare a liniilor de curent la periferia barei pe un strat de grosime δ.

Dacă bara parcursă de curentul i este plasată într-o crestătură feromagnetică (figura 8.9-b) atunci liniile de câmp magnetic au o altă distribuție. Câmpul $\bar{H}$ este nul la fundul crestăturii şi este maxim la partea de sus a barei (pentru x=b). Deci şi refularea liniilor de curent va avea loc spre partea de sus a barei, curentul putând fi concentrat pe stratul de grosime δ. Rezistența barei nu va mai fi $R_o=\rho\frac{l}{ab}$ ci $R_a=\rho\frac{l}{a\delta}$. Acest efect este numit *efectul Field direct* şi reprezintă echivalentul efectului de refulare doar că este aplicat conductoarelor plasate în crestături feromagnetice.

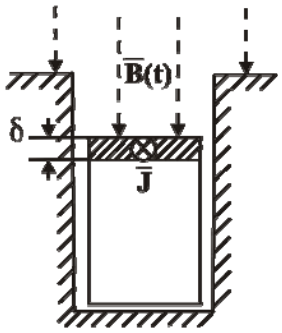


Fig 8.10

Dacă asupra barei conductoare plasată în crestătură cade un câmp magnetic inductor din exterior (figura 8.10), cum este cazul unui motor electric la care câmpul $\bar{B}$ creat de stator cade pe înfăşurarea rotorului, plasată în crestătură. Cu cât frecvența câmpului $\bar{B}$ este mai mare, densitatea curentului $\bar{J}$ indus în lungul barei va fi mai intens la suprafața de sus a acesteia, adâncimea de pătrundere δ va fi mică. Acest efect numit *efectul Field invers* este analogul efectului de pătrundere, doar că este aplicat conductoarelor plasate în crestături. La pornirea unui motor electric asincron frecvența curenților induşi în rotor este mare, δ este mic şi rezistența barei din rotor este mare, fiind cu secțiune mică. Rezistența mare va limita curentul de pornire. Pe măsură ce se accelerează, scade frecvența curenților, δ creşte, scade rezistența şi în final curenții induşi pătrund până la fundul crestăturii. Totul simulează introducerea unei rezistențe suplimentare în rotor pe timpul pornirii. Ca efectul să se manifeste deplin, la micromotoare crestăturile se fac înguste şi adânci (motor cu bare înalte) pentru a avea porniri fără şocuri.

8.7 Efectul de ecranare

A ecrana un dispozitv sensibil la câmpurile exterioare înseamnă a nu permite ca un câmp exterior să treacă prin ecran (ecranare dinspre exterior spre interior). A ecrana interior $\rightarrow$ exterior înseamnă a nu permite ca un câmp perturbator creat de un dispozitiv să se propage în mediul din jurul său.

O *ecranare electrică* (figura 8.11-a) se realizează printr-un înveliş conductor $\sum$ care nu permite să intre câmpul $\bar{E}_e$.Dacă învelişul conductor $\sum$ (o folie conductoare, plasă de sârmă etc) este legat la masă, atunci el

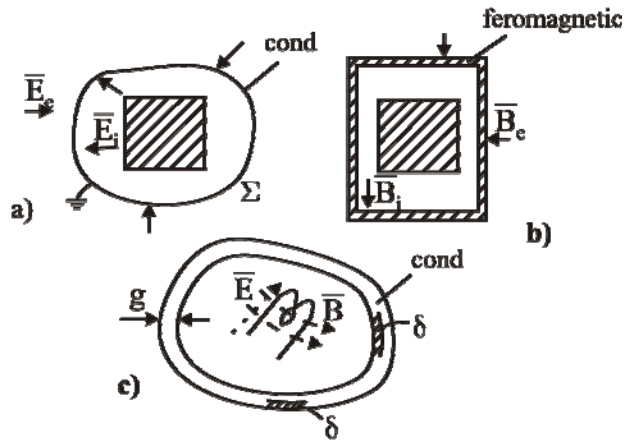


Fig 8.11

realizează ecranare în ambele sensuri, nici nu lasă să intre câmpul $\bar{E}_e$ dar nici să iasă câmpul $\bar{E}_i$.

O *ecranare magnetică* se realizează cu folie feromagnetică care înconjoară zona protejată. Ea nu lasă să treacă (deloc sau parțial) nici $\bar{B}_e$ nici $\bar{B}_i$ ca în figura 8.11-b.

Ecranare electromagnetică înseamnă a nu permite să treacă o undă electromagnetică. El se realizează dintr-o folie conductoare având grosimea g. Unda electromagnetică care cade pe suprafața ecranului va pătrundere în acesta pe adâncimea de pătrundere δ, care depinde de parametrii (σ,μ)ai ecranului şi de frecvența undei. Dacă $\delta < g$, vom obține o *ecranare completă,* unda "s-a pierdut" în ecran iar daca $\delta \geq g$ se obține o ecranare parțială, la ieşire amplitudinea sa este redusă de $e^{\alpha g}$ ori.

8.8 Efectul de levitație electromagnetică

În câmpuri statice (electrostatice, magnetostatice) nu se poate obține echilibrul unui corp încărcat sau magnetizat permanent.

În schimb un corp conductor poate fi adus în echilibru prin introducerea sa într-un câmp magnetic inductor, astfel ca interacțiunea dintre acest câmp şi curenții turbionari să anuleze greutatea corpului conductor $\bar{G}$ (figura 8.12).

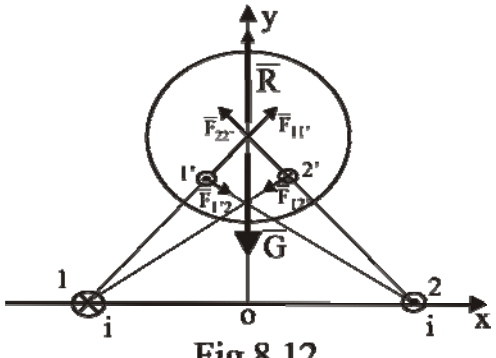


Fig 8.12

Considerăm un conductor cilindric masiv, foarte lung, plasat centrat în câmpul magnetic inductor creat de două fire (1 şi 2) parcurse de curentul i în sensuri opuse şi paralele cu axa cilindrului: $i = I_m \sin\omega t$. Problema de proximitate dintre fire şi cilindru precizează poziția firelor imagine

$1'$ şi $2'$. Compunerea forțelor de interacțiune $\overline{F}_{11'}, \overline{F}_{22'}, \overline{F}_{12'}, \overline{F}_{1'2}$ ne dă forța rezultantă $\overline{R}$ ce se exercită asupra conductorului.

Dacă cilindrul este centrat între cele două fire, forța rezultantă nu va avea decât componenta R_y; dacă nu este centrat, componenta R_x va aduce cilindrul pe axa O_y, care este o axă de stabilitate.

Dacă forța $R = R_y < G$, se obține un efect de *pernă magnetică*, corpul nu se lasă cu toată greutatea, efect utilizat în tracțiunea electrică de mare viteză pentru a reduce frecarea trenului cu calea de rulare.

Dacă $R \geq G$ se obține *efectul de levitație*(plutirea corpului conductor) într-un câmp magnetic exterior. Fenomenul este utilizat în diverse aplicații tehnice: topirea metalelor în atmosferă controlată, depunerea picăturilor conductoare în tehnologia integratelor, când picătura pentru a nu se oxida superficial se depune în vid şi dirijarea ei din exterior se face prin levitație electromagnetică.

9. Circuite electrice în regim tranzitoriu

Un circuit electric care înainte de momentul t=0 era în regim permanent (sau în repaus) va intra în regim tranzitoriu ca urmare a unei comutații ce apare în momentul inițial (t=0). Comutație într-un circuit electric înseamnă:

- *închiderea* sau *deschiderea* unui contact (sau aducerea în stare de conducție a unui dispozitiv electronic – care echivalează cu închiderea unui contact sau stingerea unui dispozitiv, care echivalează cu deschiderea unui contact).

- *aplicarea unui semnal* (cuplarea la o sursă) sau încetarea unui semnal (decuplarea de la o sursă a circuitului).

- *variația bruscă* (în trepte) a unui parametru de circuit.

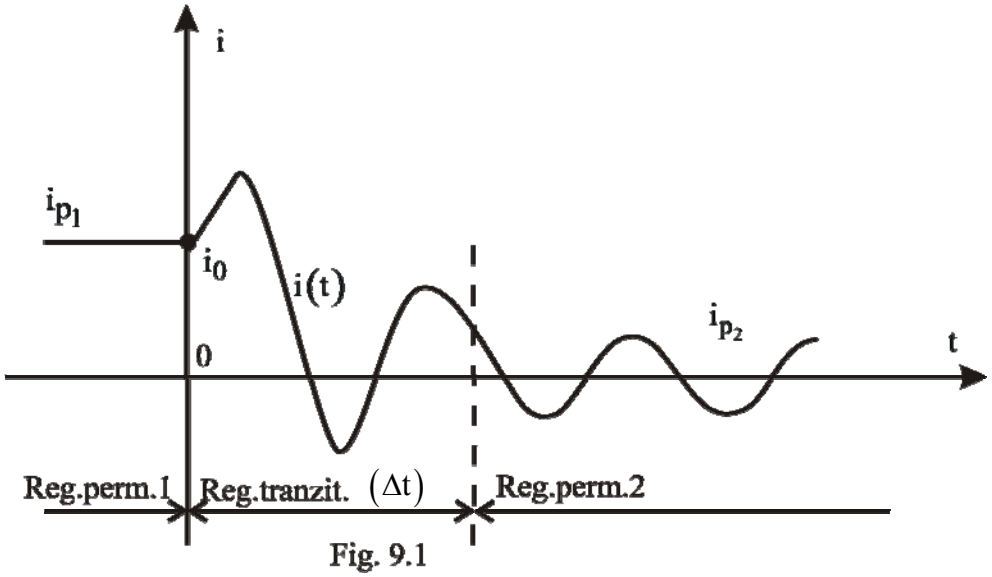


Fig. 9.1

Reglarea unor dispozitive (potențiometru, bobină variabilă, condensator variabil) chiar dacă se face relativ rapid nu declanşează un regim tranzitoriu, circuitul trece printr-o succesiune de regimuri permanente.

Comutațiile într-un circuit pot fi: *naturale* (reale) când fenomenele care însoțesc regimul respectă toate legile şi teoremele acelor fenomene, şi *forțate* (ideale) când nu toate teoremele se verifică sub forma lor clasică. Comutațiile forțate practic au apărut în studiu odată cu electronica de putere.

Un circuit funcționa într-un regim permanent (1) până la momentul t=0 când a apărut o comutație, după care urmează un regim tranzitoriu de durată Δt în care circuitul se adaptează la situația de după comutație şi în final urmează regimul permanent (2) ca în figura 9.1

Regimul tranzitoriu a unui semnal este cuprins între două regimuri permanente. Durata sa Δt teoretic este infinită, iar practic ea este de ordinul ($\mu sec \sim m sec$). Cele mai mari vârfuri de tensiune sau de curent pot apărea în timpul regimului tranzitoriu, deci circuitele trebuie protejate pe baza studiului acestor regimuri.

Soluțiile de regim tranzitoriu u(t) şi i(t) se obțin prin integrarea ecuațiilor diferențiale ale circuitelor în condiții inițiale date; pentru circuite liniare acestea sunt ecuații diferențiale cu coeficienți constanți. Soluția lor se poate scrie sub forma :

$$i(t) = i_\ell + i_f;\ u(t) = u_\ell + u_f \tag{9.1}$$

unde (i_ℓ, u_ℓ) reprezintă *componenta liberă* şi matematic ele sunt soluția generală a ecuației diferențiale omogene; în expresia lor intervin constantele de integrare al căror număr este egal cu ordinul ecuației diferențiale a circuitului, respectiv cu numărul de elemente reactive din circuit (L şi C). Circuitele de ordinul I au un L sau un C, cele de ordinul II au două elemente reactive. Circuitele care conțin numai rezistențe nu au regim tranzitoriu, ele sunt descrise de ecuații algebrice şi orice comutație ar suferi, ele intră direct în noul regim permanent. De altfel numai elementele care înmagazinează energie (L şi C) au nevoie de un interval de timp pentru a se adapta.

Componentele (i_f, u_f) se numesc *componenta forțată* şi matematic ele reprezintă soluția particulară a ecuației (sau a sistemului de ecuații) diferențiale neomogene (în membrul drept ecuațiile conțin t.e.m ale surselor din circuit).

Din alt punct de vedere, soluția de regim tranzitoriu se poate scrie astfel:

$$i(t) = i_t + i_p;\ u(t) = u_t + u_p \tag{9.2}$$

în care (i_t, u_t) reprezintă *componenta tranzitorie* a soluției (partea din soluție ce tinde la 0 când $t \to \infty$), iar (i_p, u_p) reprezintă *componenta permanentă* a soluției, cea care rămâne în circuit la sfârşitul regimului tranzitoriu, în regimul permanent 2, respectiv nu se anulează pentru $t \to \infty$.

Componentele (i_p, u_p) există numai dacă sursele din circuit au componentă permanentă (continuă, sinusoidală, periodică nesinusoidală).

În foarte multe situații există corespondențele: $i_\ell = i_t;\ i_f = i_p;\ u_\ell = u_t;\ u_f = u_p$.

Cum componentele (i_ℓ, u_ℓ) conțin constante de integrare, determinarea acestora se face punând condiția inițială în soluția generală: $i(t)= i_\ell + i_f$; $u(t) = u_\ell + u_f$.

9.1 Teoremele condițiilor inițiale pentru comutații naturale

a) Condiții inițiale pentru laturi cu bobine:

Ecuația de tensiuni pentru o bobină este:

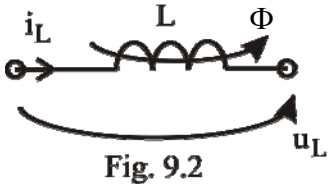


Fig. 9.2

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \tag{9.3}$$

Dacă intensitatea curentului prin bobină ar prezenta puncte de discontinuitate, atunci în punctele respective $\frac{di_L}{dt} \to \infty$ şi $u_L \to \infty$. Cum tensiuni infinite nu există, nici curentul prin bobină nu poate prezenta salturi; deci $i_L(t)$ este o funcție continuă în orice moment, inclusiv în jurul momentului comutației (t=0):

$$i_{0-} = i_{0+} = i_0 \tag{9.4}$$

Dar fluxul magnetic al bobinei este $\Phi = Li_L$, deci nici fluxul nu poate fi discontinuu:

$$\Phi_{0-} = \Phi_{0+} = \Phi_0 \tag{9.5}$$

Cele două relații (9.4) şi (9.5) ne permit să stabilim condiția inițială a unei bobine dacă ştim starea bobinei chiar înainte de comutație: $i_{o-}; \Phi_{o-}$.

Cele două relații care reprezintă *teorema condiției inițiale* pentru o bobină aflată în comutație au şi o justificare energetică. Energia magnetică a unei bobine se scrie sub forma:

$$W_m = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{\Phi^2}{2L} \tag{9.6}$$

Dacă $i_L(t)$ sau $\Phi(t)$ ar prezenta discontinuități atunci şi energia W_m ar avea discontinuități, ceea ce contrazice legile fenomenelor naturale: nici o energie nu apare sau dispare brusc şi nici nu variază prin salturi, energiile se adună în timp şi dispar în timp.

b) Condiţii iniţiale pentru condensatoare:

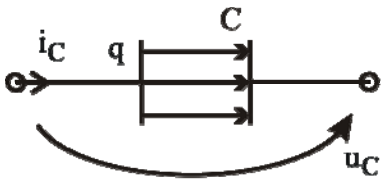


Fig. 9.3

Curentul prin condensator are expresia:

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} \tag{9.7}$$

Dacă tensiunea la bornele unui condensator $u_C(t)$ ar prezenta discontinuităţi aceasta ar implica în acele momente: $\frac{du_C}{dt} \to \infty$ şi $i_C \to \infty$. Dar curenţi infiniţi nu există, respectiv $u_C(t)$ este funcţie continuă pentru orice t, inclusiv pentru t=0:

$$u_{C_{0-}} = u_{C_{0+}} = u_{C_0} \tag{9.8}$$

$$\text{dar: } q = Cu_C \to \quad q_{0-} = q_{0+} = q_0 \tag{9.9}$$

Relaţiile (9.8) şi (9.9) reprezintă *teorema condiţiei iniţiale* pentru un condensator. Energia înmagazinată în câmpul electric dintre armăturile sale este:

$$W_e = \frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{q^2}{2C} \tag{9.10}$$

Dacă $u_C(t)$ şi q(t) ar putea fi discontinue, atunci şi W_e ar putea varia printr-un salt ceea ce contrazice legile naturii; deci (9.8) şi (9.9) au şi o justificare energetică.

Curentul printr-o bobină se scrie sub forma:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int u_L(t)dt + C_1 \quad \text{sau} \quad i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(t)dt + i_{L_0} \tag{9.11}$$

iar tensiunea la bornele unui condensator se scrie sub forma:

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)dt + A_1 \quad \text{sau} \quad u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt + u_{C_0} \tag{9.12}$$

Cele două funcţii $i_L(t)$ şi $u_C(t)$ sunt univoc determinate dacă se cunosc condiţiile lor iniţiale: i_{L_o} şi u_{C_o}. Pentru a cunoaşte evoluţia unei bobine sau a unui condensator după comutaţia din momentul (t=0), trebuie să cunosc "istoria" celor două elemente, starea lor dinainte de comutaţie, fiindcă relaţiile (9.4) şi (9.8) spun că: $i_{L_o} = i_{L_{o_}}$, $u_{C_o} = u_{C_{o_}}$.

Trebuiesc cunoscute atâtea condiţii iniţiale câte bobine şi condensatoare există în circuit, dar şi numărul constantelor de integrare din soluţie este egal tot cu ordinul circuitului (ordinul ecuaţiei sale diferenţiale) deci problema este determinată; pe baza celor două teoreme ale condiţiilor iniţiale se pot determina constantele de integrare din soluţia de regim tranzitoriu.

Observaţie: Mărimile $i_L(t)$ şi $u_C(t)$ care, conform teoremei condiţiilor iniţiale, sunt mărimi cu variaţie continuă în jurul oricărui moment t, inclusiv în jurul momentului comutaţiei (t=0); astfel de mărimi cu variaţie controlată nu prezintă salturi, ele se mai numesc *variabilele de stare* ale unui circuit electric.

9.2 Circuite simple sub excitaţii particulare

9.2.1 Cuplarea şi decuplarea unui circuit RL serie la o sursă continuă

Observaţie: Toate ecuaţiile diferenţiale ale unui circuit pentru studiul regimului tranzitoriu se scriu în starea *de după* a circuitului, deci după comutaţie. În urma comutaţiei o parte de circuit e posibil să iasă din funcţiune, deci pentru porţiunea respectivă nu se mai scriu ecuaţii.

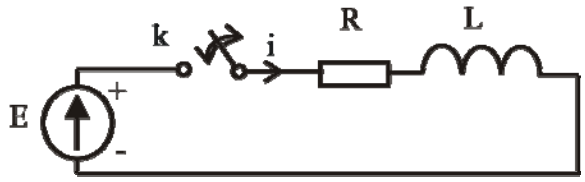


Fig. 9.3

Pentru circuitul din figura 9.3 comutaţia înseamnă închiderea contactului k la momentul t=0. Ecuaţia de tensiuni este:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \tag{9.13}$$

circuitul este de ordinul întâi (o singură bobină) deci şi ecuaţia (9.13) este de ordinul I.

Soluţia ecuaţiei diferenţiale omogene este soluţia liberă:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \;\rightarrow\; i_\ell = i_t = Ae^{-\frac{R}{L}t} \tag{9.14}$$

Soluția permanentă (forțată) se poate scrie de pe circuit; după ce a trecut regimul tranzitoriu prin circuitul din figura 9.3 se stabilizează curentul:

$$i_p = i_f = \frac{E}{R}$$

Deci:

$$i = i_p + i_t = i_p + Ae^{-\frac{R}{L}t} \xrightarrow[(t=0;i=i_o)]{} i_o = i_{p_o} + A \rightarrow A = i_o - i_{p_o}$$

Soluția de regim tranzitoriu pentru circuitul RL este de forma:

$$i = i_p + \left(i_o - i_{p_o}\right)e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (9.15')$$

Mărimea $\tau = \frac{L}{R}[\text{sec}]$ este *constanta de timp a circuitului*.

Dimensional pentru τ rezultă:

$$\left[u = Ri, u = L\frac{di}{dt}\right] \rightarrow \left[\frac{L}{R}\right] = \text{sec}.$$

Soluția

$$i = i_p + \left(i_0 - i_{p_0}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (9.15)$$

este reprezentată grafic în figura 9.4.

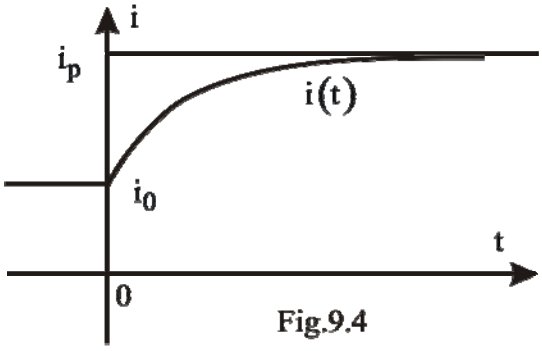


Fig.9.4

Cuplarea circuitului RL

Înainte de închiderea lui k nu există curent în circuit (i_0=0) iar în final va circula curentul $i_p = \frac{E}{R}$, deci (9.15) devine:

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (9.16)$$

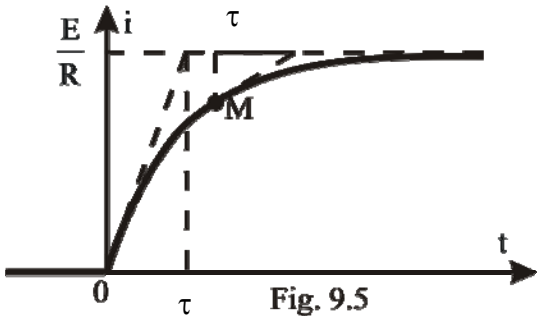


Fig. 9.5

Constanta de timp τ a unui circuit are mai multe interpretări:

- este timpul după care curentul ar atinge valoarea de regim permanent $i_p = \frac{E}{R}$ dacă ar varia cu viteza inițială (după tangenta la grafic în origine ca în figura 9.5)

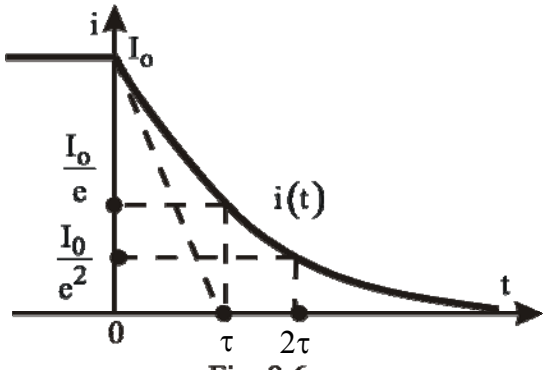


Fig. 9.6

- este subtangentă la curbă în orice punct M al variației i(t).
- pentru o mărime cu variația $i(t) = I_o e^{-\frac{t}{\tau}}$, constanta de timp τ reprezintă timpul după care mărimea i se reduce de e ori ca în figura 9.6. După 2τ se reduce de e^2 ori, iar după 5τ ajunge la valoarea $\frac{I_o}{e^5} = 0,67\%I_o$. Deducem că orice regim tranzitoriu durează maxim (4-5) constante de timp.

Bobinele cu multe spire şi aşezate pe miez magnetic au L mare şi $\tau = \frac{L}{R}$ va fi mare, pentru ele durata regimului tranzitoriu va fi mare (~ msec), ele se adaptează mai greu.

Decuplarea circuitului RL. Admitem că la momentul t=0 se deschide contactul, şi curentul care există în circuit în acel moment va fi condiția inițială pentru regimul tranzitoriu care începe: $t = 0 \rightarrow i_o = \frac{E}{R}$ iar în final pentru $t \rightarrow \infty$, $i_p = 0 \rightarrow i_{p_o} = 0$ (i_{p_o} este o mărime de calcul, ea reprezintă valoarea lui i_p luată în t=0; însă i_p nu există decât după terminarea regimului tranzitoriu, valoarea sa la t=0 nu are nici o semnificație fizică). Deci soluția de regim tranzitoriu (9.15) la decuplare este de forma:

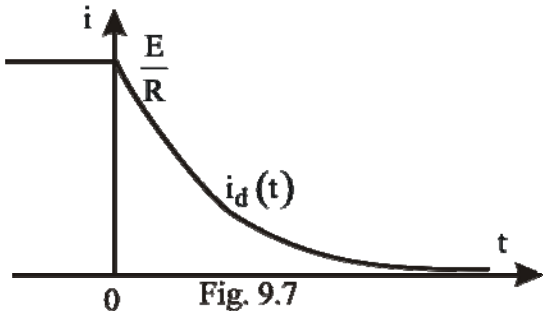


Fig. 9.7

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (9.17)$$

ea este reprezentată în figura 9.7 (i_d - curentul la decuplare). Cum contactul k s-a deschis, acest curent (9.17) nu se poate închide decât dacă între contactele fix şi mobil ale întreruptorului k apare o scânteie (la bobine mai mari chiar arc electric care se menţine până bobina s-a descărcat, toată energia sa magnetică s-a transformat în căldură pe R şi pe scânteia electrică dintre contacte. Dacă k nu este un întreruptor mecanic (ci unul electronic, static) trebuie să se prevadă în paralel cu k un *circuit de stingere* (figura 9.8) prin care să se descarce bobina. Sau în paralel cu circuitul RL se prevede o *diodă de fugă* prin care se va închide curentul de descărcare a bobinei $i_d(t)$ atunci când se decuplează de la sursă (se deschide k) ca în figura 9.9.

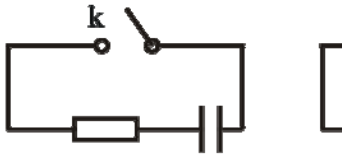


Fig. 9.8

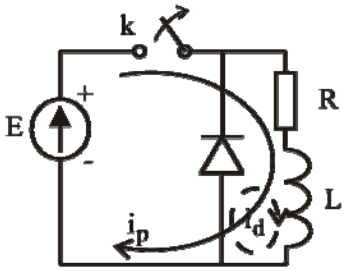


Fig. 9.9

Tensiunea la bornele bobinei va avea următoarea dinamică:

$$\begin{cases} \text{cuplare}: \quad u_L = L\dfrac{di}{dt} = E\, e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \text{decuplare}: u_L = L\dfrac{di_d}{dt} = -E\, e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases} \tag{9.18}$$

şi ele sunt reprezentate în figura 9-10 a,b.

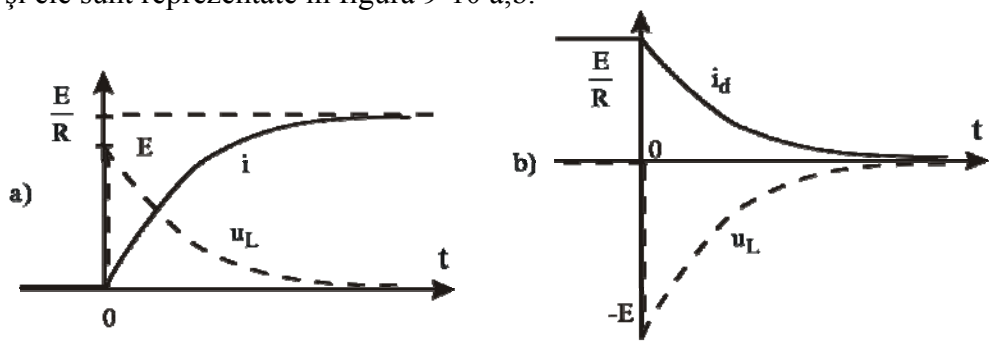


Fig. 9.10

Vârful de tensiune (-E) din figura 9.10 – b favorizează aprinderea unei scântei între contacte la deschiderea lui k.

9.2.2 Cuplarea şi decuplarea unui circuit RL serie la o sursă sinusoidală

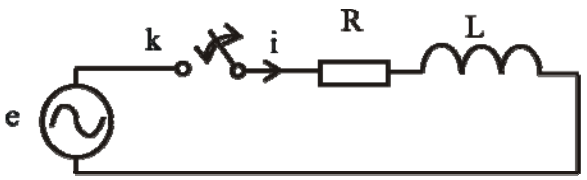


Fig. 9.11

Circuitul RL se va cupla la o sursă sinusoidală având t.e.m. e de forma:

$$e = \sqrt{2}E\sin\left(\omega t + \gamma_e\right) \quad (9.19)$$

Dacă în regim permanent γ_e era o mărime arbitrară (distanța de la originea de timp, arbitrar aleasă, până la cea mai apropiată trecere prin zero în sens crescător a lui e), în studiul regimului tranzitoriu originea de timp nu mai e aleasă arbitrar ci este chiar momentul comutației (t=0). Faza inițială γ_e pune în evidență în ce poziție a fost surprinsă sursa în momentul comutației, când t.e.m. avea valoarea e_0 (figura 9.12).

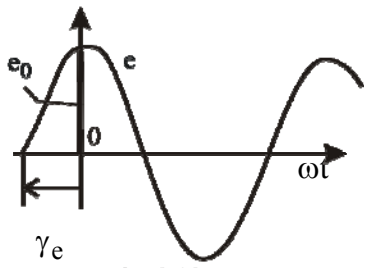


Fig. 9.12

Soluția de regim tranzitoriu este de forma (9.15) când la cuplarea circuitului vom avea:

$$t = 0 \rightarrow i_0 = 0;$$

$$i_p = \sqrt{2}\frac{E}{Z}\sin\left(\omega t + \gamma_e - \varphi\right) \xrightarrow[t=0]{} i_{p_o} = \sqrt{2}\frac{E}{Z}\sin\left(\gamma_e - \varphi\right)$$

$$\begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \\ tg\varphi = \dfrac{\omega L}{R} \end{cases} ; \; I_p = \frac{E}{Z} \quad (9.20)$$

Înlocuind în (9.15) se obține expresia curentului tranzitoriu la cuplare:

$$i = \sqrt{2}\frac{E}{Z}\left[\sin\left(\omega t + \gamma_e - \varphi\right) - \sin\left(\gamma_e - \varphi\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \quad (9.21)$$

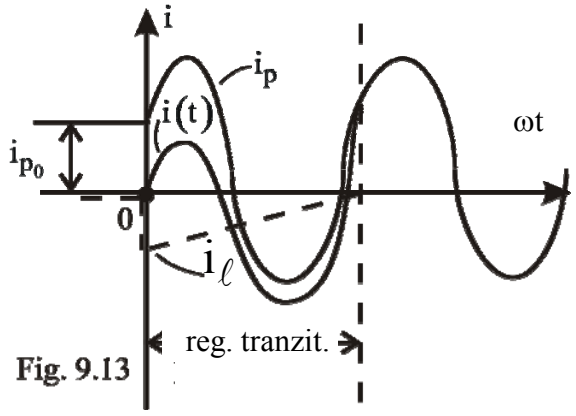


Fig. 9.13

Componentele:

$$\begin{cases} i_p = \sqrt{2} I_p \sin(\omega t + \gamma_e - \varphi) \\ i_\ell = \sqrt{2} I_p \sin(\gamma_e - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

sunt reprezentate în figura 9.13, iar soluția tranzitorie este superpozitia lor: $i = i_p + i_\ell$. Cea mai mare valoare pe care o poate atinge curentul este: $i_{max} \le 2\left(\sqrt{2}\frac{E}{Z}\right)$ în funcție de momentul ales pentru cuplarea la sursă (γ_e).

Dacă dorim să alegem un moment optim al cuplării, astfel încât să nu existe regim tranzitoriu, circuitul din repaos să treacă direct în regimul permanent i_p, trebuie ca în soluția (9.21) să impunem ca

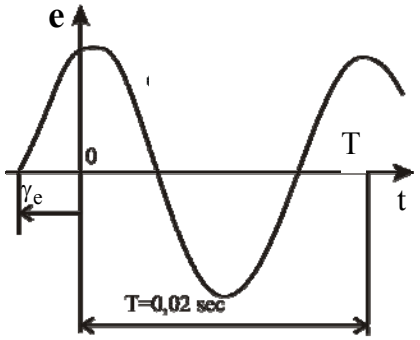


Fig. 9.14

$$i_\ell = 0 \quad \leftrightarrow \quad \sin(\gamma_e - \varphi) = 0$$

$$\gamma_{e_{opt}} = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R} \qquad (9.22)$$

Pentru o frecvență de doar f=50Hz, perioada lui e este $T = \frac{1}{f} = 0.02\,\text{sec}$ (figura 9.14) şi manual ar fi imposibil de închis circuitul pe o fază γ_e dată de (9.22). Aceasta devine posibil doar electronic, în momentul dorit ($\gamma_{e_{opt}}$) se dă impulsul de cuplare a circuitului la sursă.

9.2.3 Încărcarea şi descărcarea unui condensator

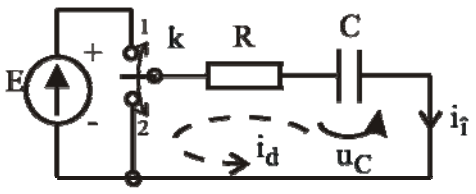


Fig. 9.15

Când comutatorul k din figura 9.15 se închide pe poziția 1, circuitul RC este cuplat la sursă şi începe încărcarea condensatorului ($i_{\hat{i}}$ – este curentul de încărcare), iar când k trece pe poziția 2, începe descărcarea (i_d –este curentul de descărcare).

Ecuația de tensiuni a circuitului este de forma:

$$Ri+\frac{1}{C}\int idt=E \qquad (9.23')$$

sau cu o schimbare de variabilă: $i=\frac{dq}{dt}\rightarrow R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E$ (9.23'')

sau $\begin{cases} q=Cu_c \\ i=C\frac{du_c}{dt} \end{cases} \rightarrow RC\frac{du_c}{dt}+u_c=E$ (9.23''')

Soluția ecuației diferențiale (9.23'') este $q=q_\ell+q_p$, în care q_ℓ este soluția generală a ecuației omogene:

$$q_\ell=Ae^{-\frac{1}{RC}t}\rightarrow q=q_p+A^{-\frac{t}{RC}} \qquad (9.24)$$

Dacă în momentul cuplării comutatorului pe poziția (1) condensatorul era încărcat cu q_o (de la o funcționare anterioară), atunci:

$$t=0\rightarrow\begin{cases} q=q_o \\ q_p\big|_{t=0}=q_{p_o} \end{cases}\rightarrow A=q_o-q_p\rightarrow q=q_p+\left(q_o-q_{p_o}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (9.25)$$

În care $\tau=RC[\sec]$ este constanta de timp a circuitului RC serie.

Încărcarea condensatorului

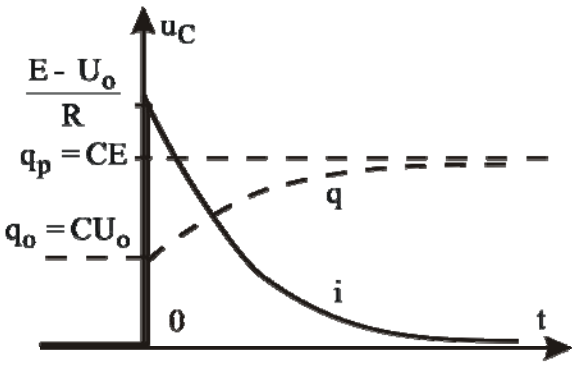


Fig. 9.16

Dacă $q_0=CU_0$ era încărcarea inițială a condensatorului iar $q_p=CE$ este încărcarea finală (după regimul tranzitoriu), atunci $q_{p_o}=q_p|_{t=0}=CE$.

Soluția (9.25) devine, pentru acest caz, de forma

$$q=CE+C\left(U_o-E\right)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (9.26')$$

iar curentul de încărcare este:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E - U_o}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (9.27')$$

reprezentate grafic în figura 9.16.

Dacă nu există încărcare inițială $(q_o = CU_o = 0)$ atunci:

$$\begin{cases} q = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & (9.26) \\ i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} & (9.27) \end{cases}$$

Curentul de încărcare este un impuls cu valoarea inițială $\frac{E}{R}$ care, dacă R este mic (cum este cazul la cuplarea cablurilor de comunicații care sunt circuite RC cu R<<), poate deveni periculos pentru circuit.

În acest caz, în serie cu circuitul RC se introduce o rezistență de valoare mare R_p (rezistență de pornire) care va limita vârful impulsului de curent la $\frac{E}{R + R_p}$ (figura 9.17) iar după regimul de cuplare se închide şi contactul k_1 pentru a scoate rezistența R_p din circuit. Se poate arăta că introducerea rezistenței R_p nu afectează cu nimic randamentul schemei.

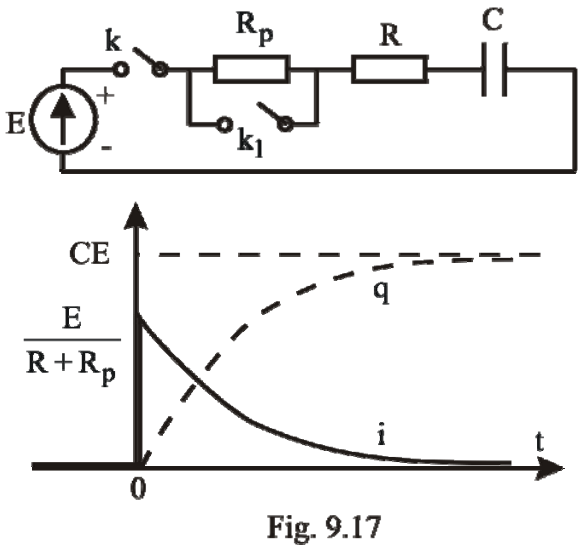


Fig. 9.17

Într-adevăr, energia transformată în căldură pe rezistența înseriată cu condensatorul are expresia:

$$W_j = \int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^\infty R\frac{E^2}{R^2}e^{-\frac{2t}{\tau}}dt = \frac{E^2}{R}\left(\frac{-\tau}{2}\right)e^{-\frac{2t}{\tau}}\Bigg|_0^\infty = \frac{CE^2}{2} \qquad (9.28)$$

Deci energia pierdută prin efect Joule nu depinde de valoarea rezistenței din circuitul de încărcare şi este egală cu energia utilă înmagazinată în condensator (randament 50%); rezistența R_p a avut doar un rol benefic.

Descărcarea condensatorului

La trecerea comutatorului k pe poziția (2) în figura 9.15 începe procesul de descărcare a condensatorului, toată energia acumulată în câmpul electric se va transforma în căldură pe rezistența R.

$$\left.\begin{array}{l} t=0 \rightarrow q_o = CE \\ t\rightarrow\infty \rightarrow q_p = 0 \leftrightarrow q_{p_0} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} q = CEe^{-\frac{t}{\tau}} \\ u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}} \\ i_d = \frac{dq}{dt} = \frac{-E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases} \qquad (9.29)$$

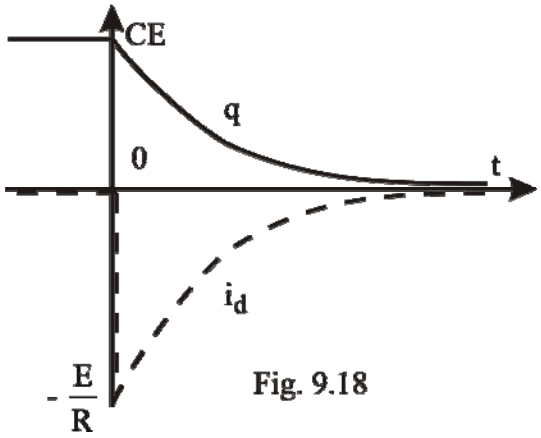


Fig. 9.18

Mărimile (9.29) reprezentate grafic arată dinamica descărcării unui condensator ca în figura 9.18.

9.2.4 Cuplarea circuitului RC la o sursă sinusoidală

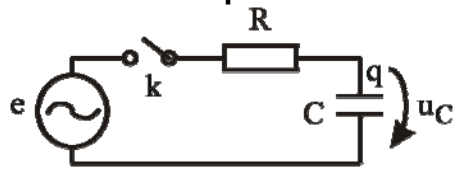


Fig. 9.19

Sursa are t.e.m.de forma:

$$e = \sqrt{2}E\sin\left(\omega t + \gamma_e\right) \qquad (9.30)$$

unde γ_e este faza inițială a lui e față de

momentul comutației (t=0).

Curentul absorbit în regim permanent este: $i_p = \sqrt{2}\frac{E}{Z}\sin\left(\omega t + \gamma_e + \varphi\right)$ unde $Z = \sqrt{R^2 + X_c^2}$ şi $\varphi = \text{arctg}\frac{1}{\omega RC}$ sunt impedanța şi defazajul introduse de circuit. Sarcina de pe armături în regim permanent este de forma:

$$q_p = \int i_p dt = \sqrt{2}\frac{E}{\omega Z}\sin\left(\omega t + \gamma_e + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \tag{9.31}$$

$$q_{p_o} = \left(q_p\right)_{t=0} = \sqrt{2}\frac{E}{\omega Z}\sin\left(\gamma_e + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \tag{9.32}$$

Dacă în momentul cuplării q_0=0, atunci expresia tranzitorie (9.25) devine:

$$q = \underbrace{\sqrt{2}\frac{E}{\omega Z}\sin\left(\omega t + \gamma_e + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}_{q_p} - \underbrace{\sqrt{2}\frac{E}{\omega Z}\sin\left(\gamma_e + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}_{q_\ell} e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{9.33}$$

Dacă dorim, şi-n acest caz, să găsim un moment optim al cuplării $\left(\gamma_{e_{opt}}\right)$, astfel ca circuitul să treacă direct în regim permanent, trebuie ca soluția liberă să fie nulă:

$$q_\ell = 0 \leftrightarrow \sin\left(\gamma_e + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow \gamma_{e_{opt}} = \frac{\pi}{2} - \varphi \tag{9.34}$$

Curentul la cuplare are expresia de forma:

$$i = \frac{dq}{dt} = \sqrt{2}\frac{E}{Z}\sin\left(\omega t + \gamma_e + \varphi\right) + \sqrt{2}\frac{E}{\omega RCZ}\sin\left(\gamma_e + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{9.35}$$

9.2.5 Regimul tranzitoriu al circuitului RLC serie

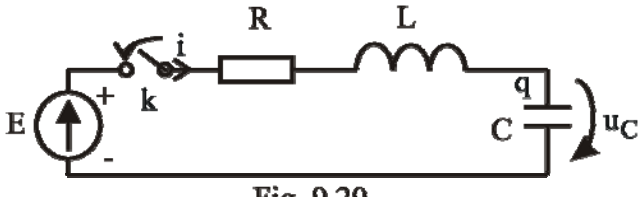


Fig. 9.20

Ecuațiile circuitului scrise în variabilele (i, q, u_C) sunt de forma:

$$\left.\begin{aligned} &Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = E \\ &i = \frac{dq}{dt} \rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \\ &i = C\frac{du_C}{dt} \rightarrow LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E \end{aligned}\right\} \quad (9.36)$$

Ecuația caracteristică pentru ecuația omogenă în variabila u_C are rădăcinile:

$$LCr^2 + RCr + 1 = 0 \rightarrow r_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC} = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (9.37)$$

Notăm: $\delta = \frac{R}{2L}$ - *factorul de amortizare* a circuitului

$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - *pulsația proprie* de rezonanță a circuitului

Deci: $r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \Omega$ (9.37')

a) dacă $\delta > \omega_o \rightarrow \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \leftrightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{cr}$ (rezistența critică a circuitului) atunci, având două rădăcini reale (r_1,r_2) soluția liberă este de forma:

$$u_{C_{\ell 1}} = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = A_1 e^{(-\delta+\Omega)t} + A_2 e^{(-\delta-\Omega)t} = Ae^{-\delta t} sh(\Omega t + \alpha) \quad (9.38)$$

soluția, în acest caz, este *aperiodică* de forma (9.38)

b) dacă $\delta = \omega_0 \rightarrow R = R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow r_1 = r_2 = -\delta$. Soluția liberă în acest caz este de forma:

$$u_{C_{\ell 2}} = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t} \quad (9.39)$$

Regimul în acest caz este un regim *aperiodic critic* (este cel mai scurt regim aperiodic)

c) dacă $\delta < \omega_0 \leftrightarrow R < R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow r_{1,2} = -\delta \pm j\Omega$

Soluția liberă are expresia:

$$u_{C\ell_3} = A_1 e^{(-\delta+j\Omega)t} + A_2 e^{(-\delta-j\Omega)t} = Ae^{-\delta t}\sin(\Omega t+\alpha) \qquad (9.40)$$

care este un *regim periodic (oscilant) amortizat*.

Circuitul este de ordinul II, ecuația diferențială este şi ea tot de ordinul II şi în soluția liberă există două constante de integrare (A_1, A_2) sau (A, α). Determinarea lor se face pe baza condițiilor inițiale.

La cuplare condensatorul putea avea o încărcare u_{C_0} sau nu $\left(u_{C_0}=0\right)$ iar curentul prin circuit înainte de cuplare era zero, iar bobina L impune $i_o = 0$.

Punând condițiile inițiale în soluția generală:

$$\left.\begin{aligned} u_C &= u_{C\ell} + u_{C_p} = u_{C\ell}(t) + E \leftrightarrow u_{C0} = u_{C\ell}(0) + E \\ i &= C\frac{du_C}{dt} = C\frac{du_{C\ell}}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1, A_2 \qquad (9.41)$$

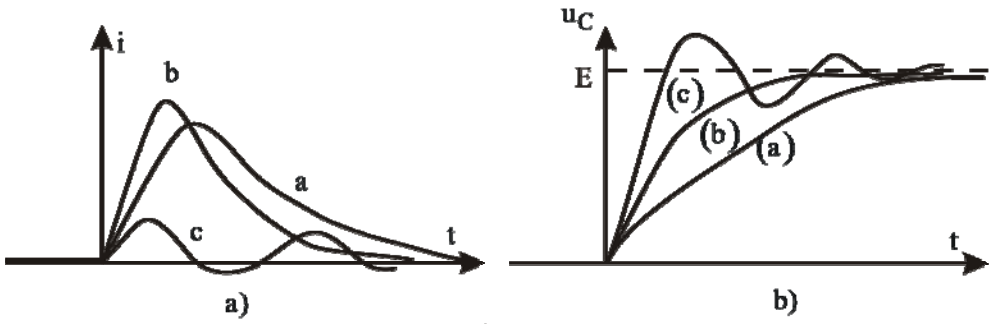


Fig. 9.21

Soluțiile sunt reprezentate grafic în fig. 9.21 – a,b. Tensiunea $u_C(t)$ tinde în final spre valoarea E, dar în funcție de valorile elementelor, dinamica cum ajunge la valoarea finală este diferită în cele trei situații(a,b,c). La curentul de încărcare a condensatorului nu va mai apare vârful de curent $\frac{E}{R}$, din cauza bobinei care se găseşte în circuitul de încărcare a condensatorului, acest maxim este redus şi întârziat în timp.

9.2.6 *Aplicații*

1. Pentru circuitul din figura 9.22 contactul k_1 se închide în momentul t=0, iar după timpul $t=t_1=4ms$ se închide şi k_2.

Să se determine expresiile tranzitorii ale curenților i, i_1 şi i_2.

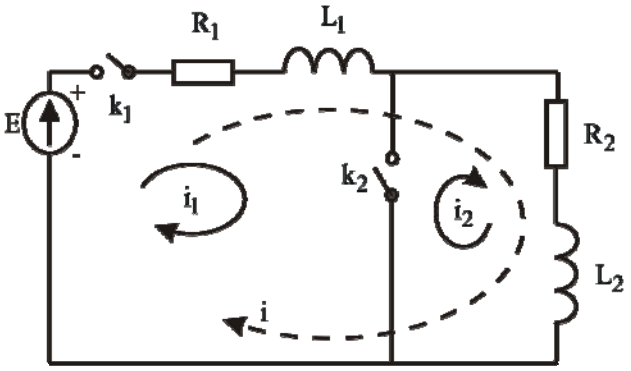


Fig. 9.22

$E = 7,5V;\ R_1 = 10\Omega;\ R_2 = 5\Omega$

$t_1 = 4ms;\ L_1 = 10mH;\ L_2 = 20mH$

a) La $t = 0;\ i_o = 0$

Ecuația de tensiuni a circuitului este:

$$(R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2)\frac{di}{dt} = E$$

$$i_p = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{7,5}{15} = 0.5A = i_{p_0};\ i_\ell = Ae^{-\frac{t}{\tau}};\ \tau = \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2} = 2ms$$

Soluția de regim tranzitoriu va fi de forma:

$$i = i_p + \left(i_o - i_{p_o}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,5\left(1 - e^{-500t}\right)\cdot\gamma(t) \qquad (9.42)$$

b) La momentul $t=t_1=4ms \rightarrow i(t_1) = 0,5\left(1 - e^{-500t_1}\right) = 0,432A$ şi aceasta va fi condiția inițială pentru ambele bobine din circuit în noul regim tranzitoriu care începe în momentul t_1.

- Bobina L_1:

$$i_{l_p} = \frac{E}{R_1} = 0,75A = i_{l_{p_o}} \rightarrow i_1 = i_{l_p} + \left(i_{l_o} - i_{l_{po}}\right)e^{-\frac{R_1}{L_1}(t - t_1)};$$

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} = 10^{-3}\,\text{sec}$$

$$i_1 = 0,75 + (0,432 - 0,75)e^{-1000(t-t_1)} = 0,75 - 0,318e^{-1000(t-t_1)} \cdot \gamma(t-t_1) \quad (9.43)$$

- Bobina L_2:

$$i_{2p} = i_{2p_o} = 0 \rightarrow i_2 = i_{2p} + \left(i_{2_o} - i_{2p_o} \right) e^{-\frac{R_2}{L_2}(t-t_1)}; \tau_2 = \frac{L_2}{R_2} = 4\text{ms}.$$

Deci: $i_2 = 0,432e^{-250(t-t_1)} \cdot \gamma(t-t_1)$ (9.44)

Dinamica celor trei curenți este prezentată în figura 9.23.

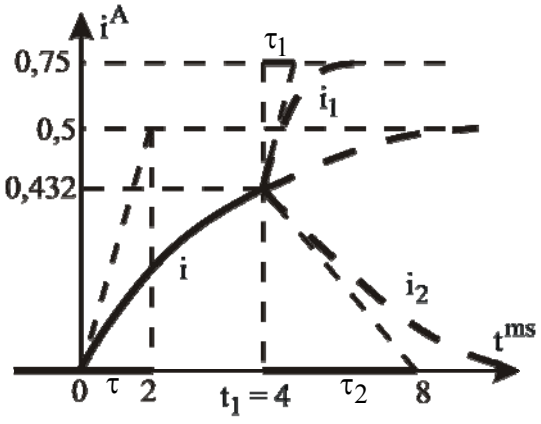


Fig. 9.23

Faptul că expresiile (9.43) şi (9.44) sunt înmulțite cu trepta translatată $\gamma(t-t_1)$ pune în evidență că cele două funcții $i_1(t)$ şi $i_2(t)$ există numai începând cu momentul t_1 ($t>t_1$).

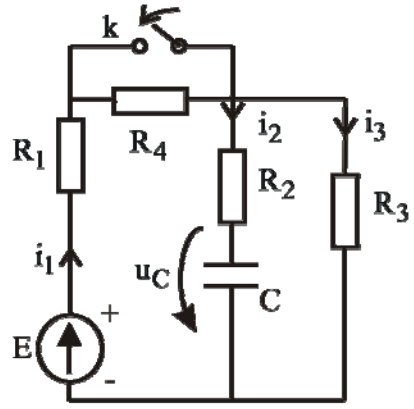


Fig. 9.24

2. Circuitul din figura 9.24 funcționează în regim permanent, iar la momentul t=0 se închide k. Se cere expresia tranzitorie pentru $u_C(t)$.

Deşi este circuit de ordinul I, cu un singur condensator, nu se pot aplica relațiile (9.25) care sunt valabile doar pentru circuite RC – serie.

Vom scrie ecuațiile de funcționare a circuitului în starea de după comutație(cu k închis):

$$\begin{cases} E = 60V \\ R_1 = 5\Omega \\ R_2 = R_3 = 10\Omega \\ R_4 = 15\Omega \\ C = 100\mu F \end{cases} \quad \begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 + u_c = E \\ R_3 i_3 - R_2 i_2 - u_c = 0 \\ i_2 = C\dfrac{du_c}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_3 = \dfrac{u_c}{R_3} + \dfrac{R_2}{R_3} C \dfrac{du_c}{dt} \\ \dfrac{C}{R_3}\left(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3\right)\dfrac{du_c}{dt} + \dfrac{R_1 + R_3}{R_3} u_c = E \\ \downarrow \\ R'C\dfrac{du_c}{dt} + R'' u_c = E \end{cases} \quad (9.45)$$

Ecuația diferențială echivalentă (9.45) la care s-a redus sistemul de ecuații inițial este o ecuație diferențială de ordinul I pentru care constanta de timp este:

$$\tau = \frac{R'C}{R''} = \frac{1}{200} = 5\text{m sec}$$

După regimul tranzitoriu se va stabiliza un regim nou permanent pentru care:

$$u_{C_p} = E\frac{R_3}{R_1 + R_3} = 40V; u_C(0_-) = E\frac{R_3}{R_1 + R_3 + R_4} = 20V$$

Soluția ecuației (9.45) este de forma:

$$u_C(t) = 40 + Ae^{-200t}$$

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) \leftrightarrow 20 = 40 + A \rightarrow A = -20$$

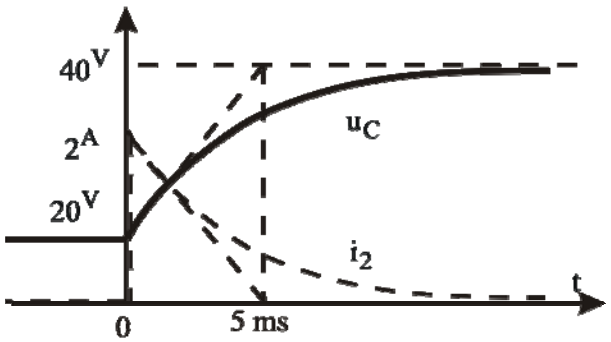


Fig. 9.25

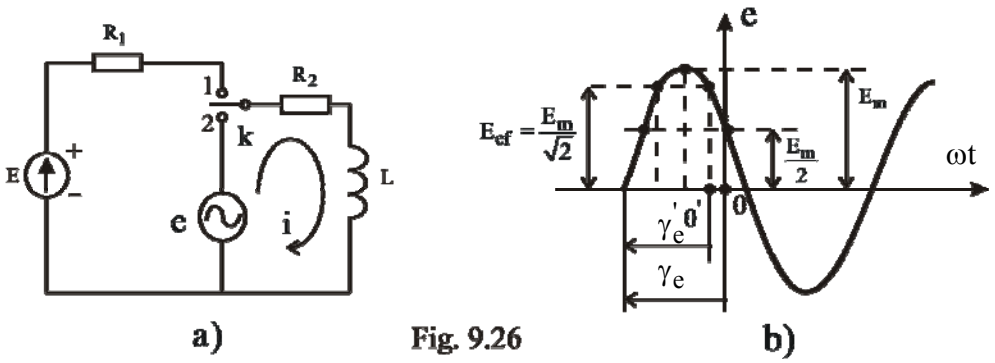
Soluțiile tranzitorii sunt:

$$\begin{cases} u_c(t) = 40 - 20e^{-200t} \\ i_2 = C\dfrac{du_c}{dt} = 2e^{-200t} \end{cases} \quad (9.46)$$

Ele sunt reprezentate grafic în figura 9.25.

3. Circuitul din fig. 9.26 – a are comutatorul k pe poziția 1 şi funcționează în regim permanent. Comutatorul k trece pe poziția 2 în momentul în care t.e.m. a sursei alternative are valoarea $\frac{E_{max}}{2}$ şi este în descreştere.

Să se determine regimul tranzitoriu al curentului i(t).



a) Fig. 9.26 b)

$$\begin{cases} R_1 = R_2 = 10\Omega; L = 31,8mH \\ E = 200V \\ e = 141\sin\left(314t + \gamma_e\right) \end{cases}$$

Comutația apare în momentul (t=0): $(e)_{t=0} = \frac{E_m}{2}$ și este în descreștere $\frac{141}{2} = 141\sin\gamma_e \rightarrow \sin\gamma_e = \frac{1}{2} \rightarrow \gamma_e = 30^\circ$ sau 150° și dacă este în descreștere $\rightarrow \gamma_e = 150^\circ\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ ca în figura 9.26 – b.

Valoarea inițială a curentului prin bobină este: $i_o = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{200}{20} = 10A$. În regim sinusoidal circuitul are: $Z = \sqrt{R_2^2 + X_L^2} = 10\sqrt{2}\Omega$; $tg\varphi = \frac{\omega L}{R_2} = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$. Deci în regimul permanent final va rămâne curentul:

$$i_p = \frac{E_m}{Z}\sin\left(\omega t + \gamma_e - \varphi\right) = 10\sin\left(314t + 105^\circ\right)\ [A]$$

$$i_{p_0} = 10\sin 105^\circ = 9,66\ A;\quad \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} = 314\,sec^{-1}$$

Soluția tranzitorie cerută este de forma:

$$i(t) = 10\sin\left(314t + 105^\circ\right) + 0,33e^{-314t} \qquad (9.47)$$

Curentul i(t) nu va avea regim tranzitoriu $\left(i_{\ell}=0\right)$ dacă $i_o = i_{p_0}$, respectiv: $10=10\sin\left(\gamma_e-\varphi\right) \rightarrow \sin\left(\gamma_e-\varphi\right)=1 \rightarrow \gamma'_e=\frac{\pi}{2}+\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

Cuplarea trebuie să aibă loc în momentul 0', astfel ca faza inițială să fie $\gamma'_e=\frac{3\pi}{4}$ şi circuitul R_2L va intra direct în regim permanent. (Aşa cum se observă pe figura 9.26 – b, la fazele $\frac{\pi}{4}$ şi $\frac{3\pi}{4}$ funcția e(t) trece prin valoarea sa efectivă $E_{ef}=\frac{E_m}{\sqrt{2}}$, iar în momentul $0^{'}$ t.e.m. e(t) trece prin valoarea efectivă şi este în descreştere).

9.3 Analiza operațională a circuitelor electrice în regim tranzitoriu pe baza transformatei Laplace

Metodele clasice (*directe*) de rezolvare a unui sistem de ecuații diferențiale implică trei etape:

- determinarea soluției generale a sistemului omogen;
- determinarea soluției particulare a sistemului neomogen;
- determinarea constantelor de integrare pe baza condițiilor inițiale date.

Metodele operaționale contopesc cele trei etape şi permit calculul direct al soluției corespunzătoare condițiilor inițiale date. Plus de aceasta, ele permit o sistematizare a calculelor (metode tip de calcul, tabele precalculate, etc.).

Metodele operaționale se bazează pe asocierea biunivocă a unei funcții imagine pentru o *funcție original* f(t) dată şi prin aceasta ecuațiile integro-diferențiale între funcțiile original se transformă în ecuații algebrice între funcțiile imagine.

Atât în metoda operațională cât şi în cea clasică intervine ca parte dificilă rezolvarea unor ecuații algebrice de grad superior (gradul polinomului în s, respectiv gradul ecuației caracteristice) dacă circuitul este de ordin superior. În reprezentarea din figura. 9.27 se prezintă în paralel cei doi algoritmi clasic şi operațional.

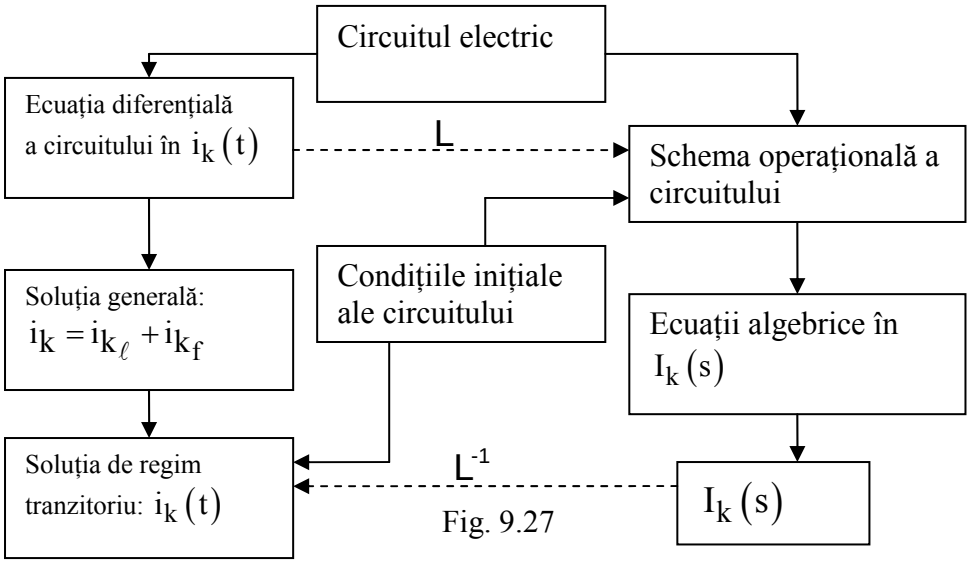


Fig. 9.27

9.3.1 Teoremele transformatei Laplace

O funcție original f(t) admite o transformată Laplace F(s) sub forma:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \tag{9.48}$$

Pentru a exista transformata (convergența integralei 9.48) funcția original f(t) trebuie să îndeplinească condițiile Dirichlet (semnal neted, cu număr finit de subintervale de monotonie) şi să nu crească în timp mai repede ca o exponențială. Semnalele fizice care există într-un circuit toate admit transformată Laplace.

→ teorema liniarității: $\mathbf{L}\left[\sum a_k f_k(t)\right] = \sum a_k F_k(s)$;

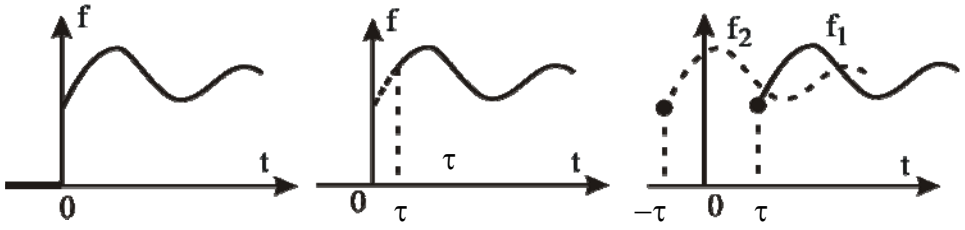
$\mathbf{L}(f_1 \pm f_2) = F_1(s) \pm F_2(s)$

→ teorema derivării: $\mathbf{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0_+)$;

$\mathbf{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f_o - s^{n-2} f_o' \ldots$

→ teorema integrării: $\mathbf{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} - \frac{f_o^{-1}}{s}$;

$$\rightarrow \quad \mathbf{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}.$$



a) $f(t)\cdot\gamma(t)$ b) $f(t)\cdot\gamma(t-\tau)$ c) $\begin{cases} f_1(t) = f(t-\tau)\cdot\gamma(t-\tau) \\ f_2(t) = f(t+\tau)\cdot\gamma(t+\tau) \end{cases}$

Fig. 9.28

În fig. 9.28–a funcția $f(t)\cdot\gamma(t)$ există pentru t>0; în fig 9.28 – b este o trunchiere, funcția $f(t)\cdot\gamma(t-\tau)$ există pentru $t>\tau$, iar în fig. 9.28 – c avem o *translație* a funcției f(t), în întârziere cu τ, $f_1(t)$ sau în avans cu τ, $f_2(t)$.

→ teorema translației în domeniul timp:

$$\mathbf{L}\left[f(t\pm\tau)\right] = e^{\pm s\tau}\,F(s) \qquad (9.49)$$

→ teorema translației în planul s (teorema atenuării, amplificării): $\mathbf{L}\left[e^{\pm at}f(t)\right] = F(s\mp a)$ (9.50)

→ teorema asemănării (scara timpului):

$$\mathbf{L}\,f(at) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right);\quad \mathbf{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$$

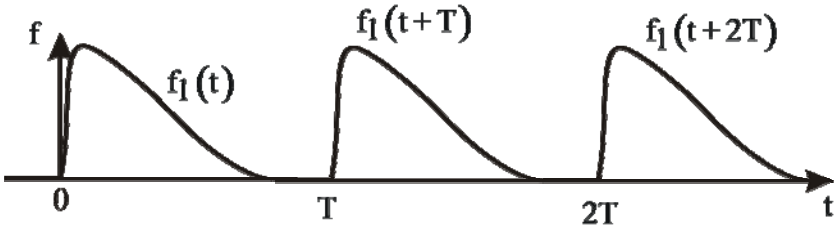
→ teorema valorii inițiale: $\lim\limits_{t\to 0_+} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$ (9.51)

→ teorema valorii finale: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$ (9.52)

→ derivata (integrala) imaginii: $\mathbf{L}\left[tf(t)\right] = -\frac{dF(s)}{ds}$;

$$\int_s^\infty F(s)\,ds \rightarrow \frac{f(t)}{t};$$

→ funcții periodice: ; $\mathbf{L}\left[f\left(t+T\right)\right]=\dfrac{F_1\left(s\right)}{1-e^{-sT}}$; (9.53)



Semnalul de forma $f_1\left(t\right)$ având transformata Laplace $F_1\left(s\right)$ se repetă cu perioada T.

→ teorema convoluției (teorema lui Borell):

$$F\left(s\right)=F_1\left(s\right)\cdot F_2\left(s\right)\xrightarrow{L^{-1}}f\left(t\right)=\int_0^t f_1\left(\tau\right)f_2\left(t-\tau\right)d\tau=\int_0^t f_1\left(t-\tau\right)f_2\left(\tau\right)d\tau \quad (9.54)$$

→ teorema lui Duhamel:

$$F\left(s\right)=s\,F_1\left(s\right)\cdot F_2\left(s\right)\rightarrow\ f\left(t\right)=\frac{d}{dt}\int_0^t f_1\left(\tau\right)f_2\left(t-\tau\right)d\tau \quad (9.55)$$

→ Transformata Laplace inversă:

- Cu formula lui Mellin-Fourier:

$$f\left(t\right)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}F\left(s\right)e^{st}ds$$

- Pe baza tabelelor de corespondență
- Cu formulele lui Heaviside (bazat pe descompunerea unui raport de polinoame în fracții simple) $F\left(s\right)=\dfrac{P\left(s\right)}{Q\left(s\right)}$

  - Poli simpli: $f\left(t\right)=\sum_1^n\dfrac{P\left(s_k\right)}{Q'\left(s_k\right)}e^{s_k t}$

  - Pol în origine: $Q(s)=sQ_1(s)$

$$f(t)=\frac{P(0)}{Q_1(0)}+\sum_1^n \frac{P(s_k)}{s_k Q_1'(s_k)} e^{s_k t}$$

$$\text{Exemplu : } I(s)=\frac{24}{(s+20)^2} \rightarrow i(t)=24t\cdot e^{-20t}$$

Tabela 9.1

Originalul f(t)	Imaginea F(s)	Originalul f(t)	Imaginea F(s)
Impuls unitate $\delta(t)$	1	$\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$	$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+\alpha}$
Impuls de arie A (de valoare A): $A\delta(t)$	A	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Treapta unitate $\gamma(t)$	$\frac{1}{s}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Treapta translatată $\gamma(t-\tau)$	$\frac{1}{s}e^{-s\tau}$	$\sin(\omega t+\varphi)$	$\frac{s\sin\varphi+\omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}$
Rampa unitate: $r(t)=t\cdot\gamma(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\cos(\omega t+\varphi)$	$\frac{s\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$
$e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{s\mp\alpha}$	$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$te^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{(s\mp\alpha)^2}$	$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
		$Ae^{\alpha t^2}$	Nu are imagine

Observaţie: Teorema valorii iniţiale o putem folosi pentru a calcula condiţia iniţială $f(0_+)$ atunci când se cunoaşte imaginea F(s), iar teorema valorii finale pentru a calcula soluţia de regim permanent care se stabileşte în circuit după regimul tranzistoriu $(t\rightarrow\infty)$ în funcţie de soluţia operaţională F(s).

9.3.2 Schemele operaționale ale circuitelor simple în regim tranzitoriu

Vom considera pe rând elementele simple de circuit cărora li se aplică la momentul t=0 tensiunea la borne u(t) sau li se injectează curentul i(t) ale căror transformate Laplace sunt U(s) şi I(s). Ecuațiilor integro-diferențiale scrise pentru funcții de timp pe schema reală li se asociază ecuații algebrice între imagini Laplace scrise pe schema operațională.

Rezistorul: $\begin{cases} u = Ri \\ i = Gu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U(s) = RI(s) \\ I(s) = GU(s) \end{cases}$

Impedanța operațională Z(s)=R şi admitanța operațională Y(s)=G fiind nişte constante, înseamnă că circuitele numai cu rezistențe nu au comportare dinamică (nu au regim tranzitoriu).

Bobina:

Ecuația de tensiuni $u = L\dfrac{di}{dt}$ cu condiția inițială $i_{0_-} = i_{0_+} = i_0$ transpusă operațional devine: $U(s) = sL\,I(s) - Li_o$ (9.56)

$\begin{cases} Z(s) = sL \text{ este } \textit{impedanța operațională} \text{ a bobinei;} \\ E_{L_o} = Li_o = \Phi_o \text{ t.e.m. } \textit{a sursei de tensiune fictivă} \text{ care echivalează condiția inițială a bobinei.} \end{cases}$

Ecuația de curenți a bobinei $i = \dfrac{1}{L}\int_0^t udt + i_o$ transpusă operațional devine :

$$I(s) = \frac{1}{sL}U(s) + \frac{i_o}{s} \tag{9.57}$$

unde:

$\begin{cases} Y(s) = \dfrac{1}{sL} \text{ este } \textit{admitanța operațională} \text{ a bobinei;} \\ I_{L_0} = \dfrac{i_o}{s} \text{ este curentul de scurt al } \textit{sursei fictive de curent} \text{ care echivalează condiția inițială.} \end{cases}$

Ecuației 9.56 îi corespunde o schemă ooerațională în care în serie cu impedanța bobinei sL se introduce o sursă de tensiune $E_{L_0} = \Phi_o = Li_o$ orientată în sensul lui I(s).

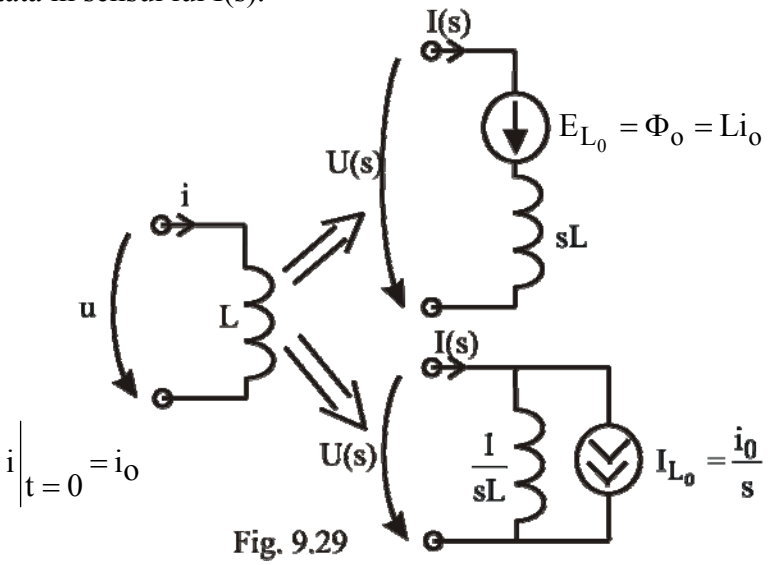


Fig. 9.29

Ecuației 9.57 îi corespunde o schemă operațională în care în paralel cu admitanța bobinei $\frac{1}{sL}$ se introduce o sursă de curent I_{L_0} orientată în sensul de referință a laturii (figura 9.29).

Bobine cuplate:

Tensiunea la bornele bobinei j dintr-un sistem de bobine este:

$$u_j = \sum_{k=1}^{m} L_{jk} \frac{di_k}{dt} \xrightarrow{L} U_j(s) = \sum_{k=1}^{m} sL_{jk} I_k(s) - \sum_{k=1}^{m} L_{jk} i_k(0) \qquad (9.58)$$

unde $sL_{jk}=Z_{jk}(s)$ este impedanța operațională de cuplaj; $L_{jk}i_k(0)$ este valoarea inițială a fluxului de cuplaj dintre j şi k, iar $\Phi_j(0) = \sum_{k=1}^{m} L_{jk} i_k(0)$ este valoarea inițială a fluxului prin bobina j, în care intră atât fluxul propriu cât şi cele de cuplaj între L_j şi celelalte m bobine din circuit.

Separând fluxul propriu se poate scrie:

$$\begin{cases} u_j = \dfrac{d\Phi_j}{dt} \rightarrow U_j(s) = s\Phi_j(s) - \Phi_j(0) \\ u_j = L_j \dfrac{di_j}{dt} + \sum_{k=1}^{m} L_{jk} \dfrac{di_k}{dt} \rightarrow U_j(s) = sL_jI_j(s) + \sum_{k=1}^{m} sL_{jk}I_k(s) - \underbrace{\left[L_j i_{j_o} + \sum_{k=1}^{m} L_{jk}^{\pm} i_{k_o} \right]}_{\Phi_{j_o} = E_{j_o}} \end{cases} \tag{9.59}$$

În serie cu bobina se introduce în schema operațională o sursă fictivă de tensiune având t.e.m. E_{j0} egală numeric cu valoarea inițială a fluxului său Φ_{j_o}; $\left[E_{j_o}^{V} = \Phi_{j_o}^{Wb} \right]$.

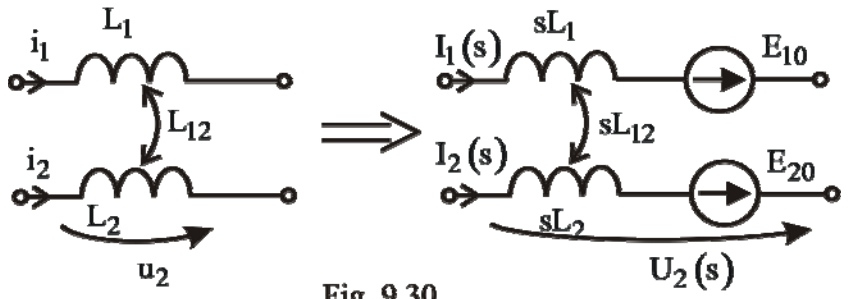


Fig. 9.30

În particular vom desena schema operațională pentru două bobine cuplate (figura 9.30) când sursele fictive au valorile:

$$\begin{cases} E_{1o} = L_1 i_{1o} \pm L_{12} i_{2o} \\ E_{2o} = L_2 i_{2o} \pm L_{12} i_{1o} \end{cases}$$

Tensiunii $u_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} \pm L_{12} \dfrac{di_1}{dt}$ îi corespunde imaginea $U_2(s)$ care cuprinde și sursa fictivă E_{20}:

$$U_2(s) = sL_2I_2(s) \pm sL_{12}I_1(s) - E_{20} \tag{9.60'}$$

Condensatorul:

Ecuația de curenți: $i = C\dfrac{du}{dt} \xrightarrow{L} I(s) = sCu(s) - Cu_{C_o}$ (9.60)

$\begin{cases} Y(s) = sC \text{ este } \textit{admitanța operațională} \text{ pentru condensator;} \\ I_{c_o} = q_o = Cu_{C_o} \text{ este curentul de scurt al } \textit{sursei de curent fictive} \\ \text{corespunzătoare condițiilor inițiale:} \end{cases}$

Ecuația de tensiuni: $u_c = \frac{1}{C}\int_0^t idt + u_{c_o} \xrightarrow{L} U_c(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_{c_o}}{s}$ (9.61)

$\begin{cases} Z(s) = \frac{1}{sC} \text{ este } \textit{impedanța operațională} \text{ a unui condensator} \\ E_{C_o} = \frac{u_{C_o}}{s} \text{ este t.e.m. a } \textit{sursei fictive de tensiune} \text{ corespunzătoare} \end{cases}$

condiției sale inițiale.

Ecuației 9.61 îi corespunde o schemă operațională în care, în serie cu impedanța $\frac{1}{sC}$ se introduce o sursă de tensiune E_{C_0} orientată invers cu sensul de referință al laturii.

Ecuației 9.60 îi corespunde o schemă operațională în care în paralel cu admitanța sC se introduce invers cu orientarea laturii o sursă de curent $I_{C_o}\left(I^A_{C_o} = q^C_o\right)$.

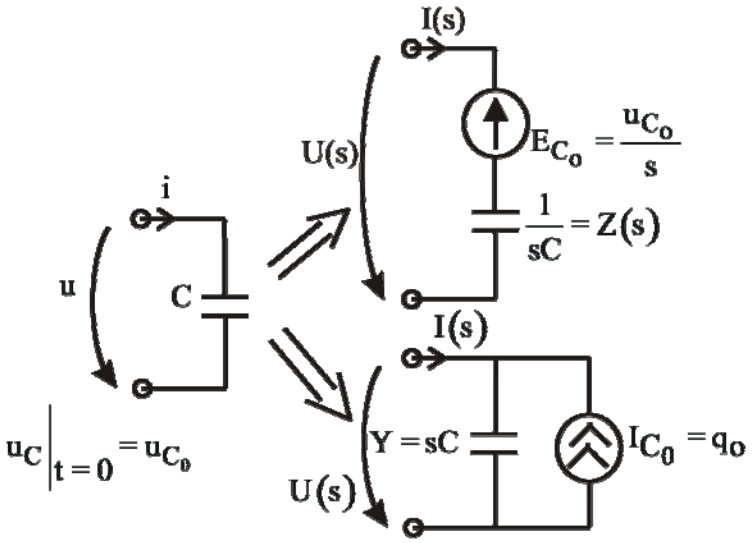
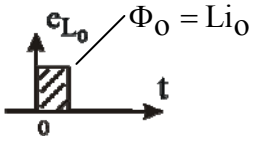


Fig. 9.31

Observație 1. Acestor surse fictive operaționale $E_{L_0}, E_{C_0}, I_{L_0}, I_{C_0}$ *le corespund în domeniul timp surse "reale" corespunzătoare condițiilor inițiale:* $e_{L_0}, e_{C_0}, i_{L_0}, i_{C_0}$ *, după cum urmează:*

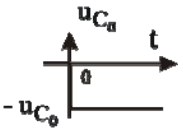
$$E_{L_o} = \Phi_o = Li_o = cst \rightarrow e_{L_o} = \Phi_o \delta(t) = Li_o \delta(t)$$

e_{L_o} - impuls de arie Φ_0

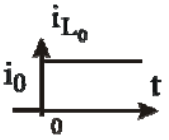


$$E_{C_o} = \frac{u_{C_o}}{s} \rightarrow e_{C_o} = u_{C_o} \cdot \gamma(t)$$

e_{C_o} - treaptă de valoare u_{C_0}

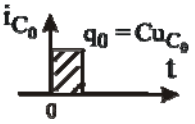


$$I_{L_o} = \frac{i_o}{s} \rightarrow i_{L_o} = i_o \cdot \gamma(t)$$ - treaptă de curent



$$I_{C_o} = q_o = Cu_{C_o} \rightarrow i_{C_o} = q_o \cdot \delta(t)$$

i_{C_o} - impuls de valoare (arie) q_0



2. Un condensator poate să aibă condiție inițială pozitivă CI^+ sau condiție inițială negativă CI^-. În schema operațională sursele fictive corespunzătoare se așează întotdeauna corect (invers cu orientarea laturii), iar valoarea lor poate fi $(\pm)$ ca în figura 9.32.

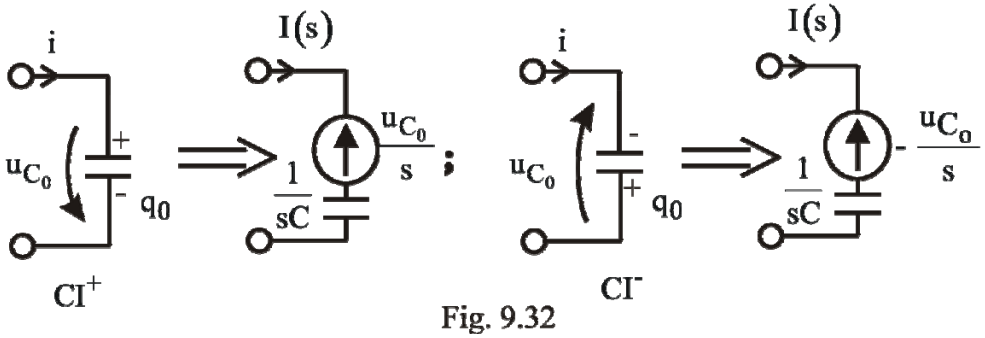


Fig. 9.32

Circuite serie în operațional

Ecuația de tensiuni *pentru un circuit RLC* serie este:

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t idt + u_{C_o} \rightarrow U(s) = \left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) I(s) - Li_o + \frac{u_{C_o}}{s} \quad (9.62)$$

$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$ este impedanța operațională a circuitului

$E_o = Li_o - \frac{u_{C_0}}{s}$ este t.e.m. a sursei fictive care echivalează condiția inițială a circuitului (L şi C).

Atunci schema operațională a circuitului RLC serie este ca şi în figura 9.33.

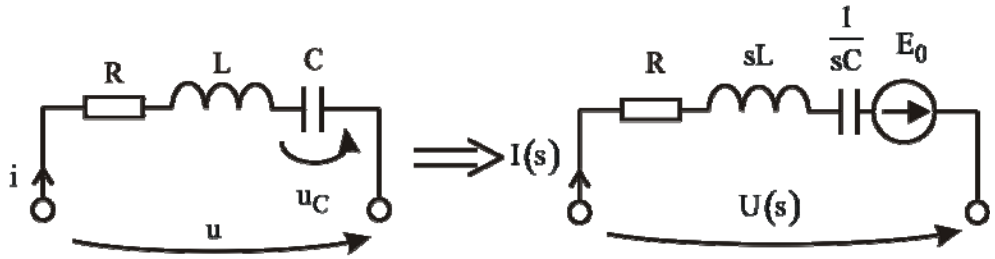


Fig. 9.33

Pentru a scrie operațional tensiunea de pe bobină sau pe condensator va trebui separat din E_o condiția inițială care-i revine fiecăruia:

$$\begin{cases} U_L(s) = sLI(s) - Li_o \\ U_C(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_{C_0}}{s} \end{cases} \tag{9.63}$$

9.3.3 Forma operațională a teoremelor lui Kirchhoff

Pentru un circuit oarecare cu s – subrețele , n – noduri şi ℓ – laturi cu T1K se scriu (n-s) ecuații independente în noduri, iar cu T2K se scriu o= ℓ -n+s ecuații independente pe ochiuri.

$$\begin{cases} \sum\limits_{k \in b} i_k = 0; \quad b = \overline{1, n-s} \\ \sum\limits_{k \in p} \left(u_{R_k} + u_{L_k} + u_{C_k} \right) = \sum\limits_{k \in p} e_k; \quad p = \overline{1, o} \end{cases} \tag{9.64}$$

Aplicând transformata Laplace membru cu membru asupra sistemului (9.64) se obține:

- $i_k(t) \to I_k(s) = I_k$

- $u_{R_k} = R_k i_k \rightarrow U_{R_k} = R_k I_k$
- $u_{L_k} = \dfrac{d\Phi_k}{dt} = \sum_{j=1}^{\ell} L_{kj} \dfrac{di_j}{dt} \rightarrow U_{L_k}(s) = s\Phi_k - \Phi_{k_o} = \sum_{1}^{\ell} sL_{kj} I_j - \Phi_{k_o}$

unde $\Phi_{k_o} = \sum_{1}^{\ell} L_{kj} i_{j_o}$ - este valoarea inițială a fluxului prin bobina L_k

- $u_{C_k} = \dfrac{1}{C_k} \int_0^t i_k dt + u_{C_{k_o}} \rightarrow U_{C_k}(s) = \dfrac{I_k}{sC_k} + \dfrac{u_{C_{k_o}}}{s}$

Sistemul (9.64) se poate scrie operațional sub forma:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k \in b} I_k(s) = 0 \ ; \ b = \overline{1, n-s} \\ \sum\limits_{k \in p} \left\{ \left[\left(R_k + sL_k + \dfrac{1}{sC_k} \right) I_k + \sum\limits_{1}^{m} sL_{kj} I_j \right] - \sum\limits_{j=1}^{m} L_{kj} i_{j_0} + \dfrac{u_{C_{k_0}}}{s} \right\} = \sum\limits_{k \in p} E_k(s) \end{cases} \quad (9.65)$$

Notăm:

$E_{e_k}(s) = E_k(s) + \Phi_{k_0} - \dfrac{u_{C_{k_0}}}{s}$ - t.e.m. echivalentă laturii k şi formată din t.e.m. a sursei reale de pe latura $E_k(s)$ şi t.e.m. ale surselor fictive ce echivalează condiția inițială a lui L_k: $E_k = \Phi_{k_o} = L_k i_{k_o} + \sum L_{kj} i_{j_o}$ sau a lui C_k: $E_{C_{k_o}} = \dfrac{u_{C_{k_o}}}{s}$

$Z_k(s) = R_k + sL_k + \dfrac{1}{sC_k}$ este impedanța operațională a laturii k

$Z_{kj}(s) = sL_{kj}$ – impedanța operațională de cuplaj dintre L_k şi L_j

TK scrise în (9.65) cu notațiile făcute devine:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k\in b} I_k = 0 \\ \sum\limits_{k\in p}\left(Z_k I_k + \sum\limits_{j=1}^{m} Z_{kj} I_j \right) = \sum\limits_{k\in p} E_{e_k} \end{cases} \tag{9.66}$$

T2K se enunță astfel: "suma algebrică a căderilor de tensiune operaționale pe elementele ochiului p este egală cu suma algebrică a t.e.m. operaționale din ochi".

Algoritmul aplicării TK – operațional la studiul regimurilor tranzitorii presupune:

- Se studiază funcționarea circuitului înainte de comutație pentru a se stabili condițiile inițiale pentru fiecare bobină şi condensator din circuit $\left(i_{L_o}, u_{C_o}\right)$.
- Se alcătuieşte schema operațională care va conține partea din circuit care este în funcțiune după comutație (t>0).
- Elementele schemei operaționale au impedanțele $R, sL, \frac{1}{sC}, sL_{kj}$ şi în serie cu fiecare bobină şi condensator se introduce câte o sursă fictivă de tensiune corespunzătoare condiției inițiale ale acelui element.
- Se aplică TK scriind ecuațiile (9.66) pe noduri şi ochiuri independente, alese cu ajutorul grafului de circuit.
- Se rezolvă sistemul algebric de ecuații (9.66) şi se obțin imaginile curenților din fiecare latură sub forma: $I_k(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$.
- Se revine în domeniul timp cu : transformata inversă (L^{-1}), tabelele de corespondență, teoremele lui Heaviside şi se obțin curenții tranzitorii din laturi $i_k(t)$.
- Schemei operaționale, odată desenată, i se poate aplica oricare dintre teoremele şi metodele de analiză utilizate de teoria circuitelor pentru studiul regimului permanent (curenți ciclici, potențiale la noduri, variante matriciale, generatoare echivalente etc.). Excepție față de regimul permanent sinusoidal fac

teoremele de conservare a puterilor, care erau condiționate de caracterul periodic al mărimilor, în regim tranzitoriu, unde mărimile nu sunt periodice rămâne valabilă doar teorema de conservare a puterilor instantanee, evident fără aplicabilitate deosebită.

Observație: În regim permanent, pentru un dipol pasiv, se poate întotdeauna scrie $\underline{Z}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}$. În regim tranzitoriu nu este suficient să fie pasiv (fără surse) ci trebuie ca toate elementele sale de tip L şi C să fie în condiții inițiale nule (CI=0), altfel în schema operațională apar surse fictive corespunzătoare acestor condiții inițiale. Deci pentru circuite pasive şi cu condiții inițiale nule se poate scrie:

$$Z(s)=\frac{U(s)}{I(s)}$$

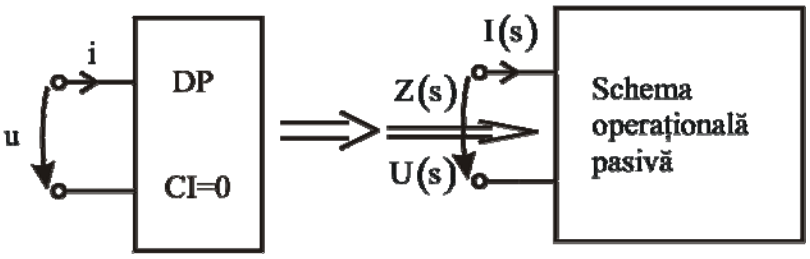


Fig. 9.35'

Aplicație:

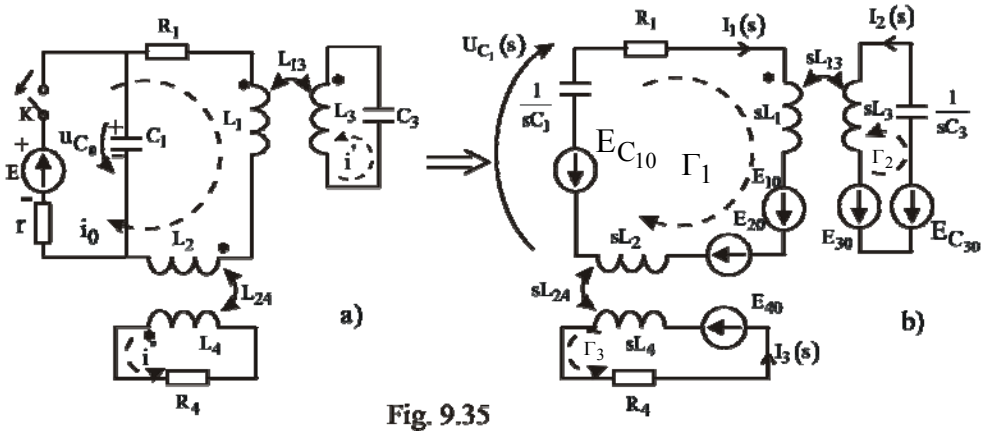


Fig. 9.35

Circuitul din figura 9.35 – a funcționează în regim permanent; circulă curentul $i_o=\frac{E}{r+R_1}$, iar C_1 este încărcat cu tensiunea $u_{C_o}=R_1 i_o$. În cele două bucle nu există curent i'=0 şi i''=0 (fluxurile fiind constante nu

induc t.e.m.). La momentu t=0 se deschide contactul k şi latura cu sursă iese din funcțiune.

În figura 9.35 – b este desenată schema operațională a circuitului, în serie cu fiecare bobină şi condensator este plasată câte o sursă corespunzătoare condiției sale inițiale:

$$\begin{aligned} &E_{1o} = L_1 i_o; E_{2o} = L_2 i_o; E_{3o} = L_{13} i_o = \Phi_{3o}; E_{4o} = L_{24} i_o = \Phi_{4o}; \\ &E_{C_{1o}} = -\frac{u_{C10}}{s}; E_{C_{3o}} = 0; \end{aligned} \tag{9.67}$$

Pe schema operațională cu topologia [s=3, n=3, ℓ=3] scriem ecuațiile de funcționare cu TK:

$$\begin{cases} \left(R_1 + s(L_1 + L_2) + \dfrac{1}{sC_1}\right) I_1 + sL_{13} I_2 - sL_{24} I_3 = E_{10} + E_{20} - E_{C_{10}} \\ sL_{13} I_1 + \left(sL_3 + \dfrac{1}{sC_3}\right) I_2 = E_{30} - E_{C_{30}} \\ -sL_{24} I_1 + (R_4 + sL_4) I_3 = E_{40} \end{cases} \tag{9.68}$$

Prin rezolvarea sistemului 9.68 rezultă $I_1(s)$, $I_2(s)$, $I_3(s)$. Aplicând transformata Laplace inversă se obțin soluțiile de regim tranzitoriu $i_1(t)$, $i_2(t)$ şi $i_3(t)$.

Tensiunea la bornele condensatorului C_1 se poate deduce astfel:

$$u_{C_1}(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1(t)\,dt + u_{C_{10}}$$

sau : $$U_{C_1}(s) = \frac{I_1(s)}{sC_1} + E_{C_{10}} \rightarrow \; u_{C_1}(t) = L^{-1}\left[U_{C_1}(s)\right].$$

9.4 Comutații forțate

Comutații forțate(ideale, impropii) într-un circuit sunt cele la care nu se respectă condițiile(9.4), (9.8) respectiv $i_L(t)$ şi $u_C(t)$ nu mai sunt variabile de stare, controlate, ele pot avea variații prin salt, discontinuități .O *comutație forțată* apare într-un circuit dacă:

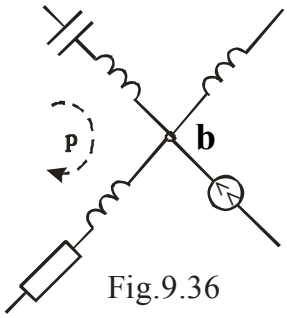


Fig.9.36

- în urma comutației două bobine L_1 şi L_2 cu "istorie" diferită ($i_{10-} \neq i_{20-}$)ajung în serie, deci : $i_{10+} = i_{20+}$.
- în urma comutației o bobină ajunge în serie cu o sursă ideală de curent, chiar dacă: $i_{o-} \neq i_{sc_{o-}}$, imediat după comutație : $i_{o+} = i_{sc_{o+}}$.
- într-un nod b de circuit (figura 9.36) concura doar laturi cu bobine şi cu surse ideale de curent. Rămâne adevărată T1K: $\sum_{k \in nod\ b} i_{ko-} = 0$ şi $\sum_{k \in nod\ b} i_{ko+} = 0$, numai că diferiții curenți vor prezenta discontinuități
- două condensatoare cu "istorie" diferită ($u_{c_{1o-}} \neq u_{c_{2o-}}$) ajung în paralel, deci: $u_{c_{1o+}} = u_{c_{2o+}}$.
- un condensator ajunge în paralel cu o sursă ideală de tensiune : $u_{c_{o-}} \neq e_{o-}$ dar $u_{c+} = e_{o+}$.
- O buclă formată numai din laturi cu condensatoare şi surse ideale de tensiune pentru care T2K înseamnă : $\sum_{k \in ochi} u_{k_{o-}} = 0$ şi $\sum_{k \in ochi} u_{k_{o+}} = 0$, numai că diferitele tensiuni vor avea discontinuități de la $t = 0_-$ la $t = 0_+$.

În astfel de comutații curenții $i_L(t)$ au discontinuități care duc la impulsuri de t.e.m. cu valori foarte mari la bornele bobinelor iar discontinuitățile tensiunilor $u_C(t)$ duc la impulsuri foarte mari de curent prin condensatoare. De fapt egalizarea condițiilor inițiale la $t = 0_+$ se realizează prin aceste impulsuri .

9.4.1 Teorema condițiilor inițiale pentru comutații forțate la condensatoare

Fie o sectiune $\sum_1$ ce conține numai laturi cu condensatoare (figura 9.37).

Curentul prin latura k este $i_k = \frac{dq_k}{dt}$ iar sarcina de pe armătura lui C_k va fi:

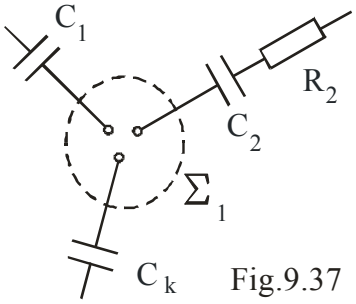


Fig.9.37

$$q_{k(t)} = \int_{-\infty}^{t} i_k(t')dt = q_k(t_o) + \int_{t_o}^{t} i_k(t')dt' \quad . \tag{9.69}$$

momentul t' fiind oarecare: $t' \in (-\infty, t)$ iar $i_k(t') = C_k \frac{du_k(t')}{dt'}$. Cum pentru toate laturile ce converg în secțiunea $\sum_1$ este valabilă TTK, putem scrie:

$$\sum_{k \in \sum_1} i_k(t') = 0 \Rightarrow \sum_{k \in \sum_1} q_k(t) = \sum_{k \in \sum_1} C_k u_k(t) = ct \tag{9.70}$$

Cum (9.70) este valabilă pentru orice moment "t", ele rămân valabile şi pentru momentul inițial (momentul comutației t_o):

$$\sum_{k \in \sum_1} q_k(t_o) = ct \leftrightarrow \sum_{k \in \sum_1} q_k(0_-) = \sum_{k \in \sum_1} q_k(0_+) \tag{9.71}$$

Relația reprezintă *teorema condițiilor inițiale* pentru condensatoare aflate în comutație forțată. La comutații naturale pentru fiecare condensator în parte era adevărat că: $q_{o_-} = q_{o_+}$ (relația 9.9) iar la comutații forțate doar suma pentru toate condensatoarele ce converg într-un nod(sau într-o secțiune $\sum_1$)este continuă în jurul momentului $t = 0$ (relația 9.71).

9.4.2 Teorema condițiilor inițiale pentru comutații forțate la bobine

Considerăm o buclă Γ (un ochi p) care cuprinde cel puțin două bobine aflate în comutație forțată (figura 9.38).

Tensiunea la bornele bobinei L_k este: $u_k = \frac{d\Phi_k}{dt}$ iar fluxul prin bobina L_k se poate scrie astfel:

$$\Phi_k(t) = \int_{-\infty}^{t} u_k(t')dt' = \Phi_k(t_o) + \int_{t_o}^{t} u_k(t')dt' \qquad (9.72)$$

momentul t' fiind oarecare $t' = (-\infty, t)$. Pentru bucla Γ din figura 9.38 sau pentru ochiul p din figura 9.36 , T2K ne dă :

$$\sum_{\substack{k \in \Gamma \\ (p)}} u_k(t') = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k \in \Gamma} \Phi_k(t) = \sum_{k \in \Gamma} L_k i_k(t) = ct \qquad (9.73)$$

Cum (9.73) sunt adevărate pentru orice moment t, ele rămân valabile şi pentru momentul inițial t_o (sau $t = 0$):

$$\sum_{k \in ochi} L_k i_k(t_o) = ct \rightarrow \sum_{k \in ochi} \Phi_k(0_-) = \sum_{k \in ochi} \Phi_k(0_+) \qquad (9.74)$$

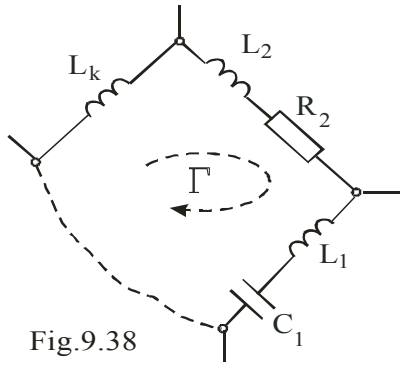
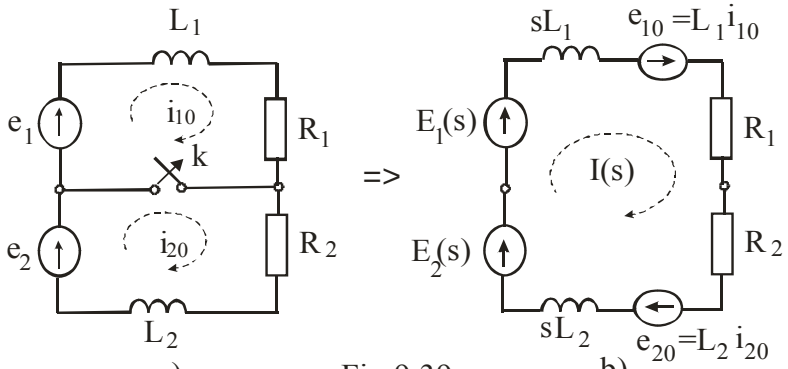


Fig.9.38

Relația (9.74) reprezintă *teorema condițiilor inițiale* pentru bobine aflate în comutație forțată.La o comutație naturală fluxul magnetic Φ_k şi curentul i_{L_k} ale fiecărei bobine sunt variabile de stare: $\Phi_{o_-} = \Phi_{o_+}$ şi $i_{L_{o_-}} = i_{L_{o_+}}$. La comutații forțate doar suma fluxurilor pentru toate bobinele din bucla Γ (sau din ochiul p) este continuă în jurul momentului de comutație $t = 0$. (relația 9.74)

9.4.3 Aplicație



a) Fig.9.39 b)

Pentru circuitul din figura 9.39 contactul k se deschide la momentul $t = 0$, condiția inițială a celor două bobine este: $i_{10_} \neq i_{20_}$. La momentul $t = 0_+$ cele două bobine ajung în serie dar cu curenți diferiți prin ele şi vor avea aceeaşi condiție inițială i_{o+}, unde:

$$i_{0_+} \neq i_{10_} \neq i_{20_} \tag{9.75}$$

Ecuația de tensiuni scrisă pentru schema operațională a circuitului din figura 9.39-b este:

$$s\left(L_1 + L_2\right)I(s) + \left(R_1 + R_2\right)I(s) = E_1(s) + E_2(s) + \left(L_1 + L_2\right)i_{0_+} \tag{9.76}$$

Conform cu relația (9.74): $\Phi_{\Gamma(0_)} = \Phi_{\Gamma(0_+)}$, deci:

$$L_1 i_{10_} + L_2 i_{20_} = \left(L_1 + L_2\right)i_{0_+} \rightarrow i_{0_+} = \frac{L_1 i_{10_} + L_2 i_{20_}}{L_1 + L_2} \tag{9.77}$$

În urma comutației ($t = 0$) curenții din cele două bobine vor avea un salt :

$$\begin{cases} \Delta i_{10} = i_{0_+} - i_{10_} = \dfrac{L_2}{L_1 + L_2}\left(i_{20_} - i_{10_}\right) \\ \Delta i_{20} = i_{0_+} - i_{20_} = \dfrac{L_1}{L_1 + L_2}\left(i_{10_} - i_{20_}\right) \end{cases} \tag{9.78}$$

Fluxul magnetic total al ochiului care cuprinde cele două bobine aflate în comutație forțată va avea o variație continuă în jurul momentului $t = 0$:

$$\begin{cases} \Phi_{0_+} = \left(L_1 + L_2\right)i_{0_+} \\ \Phi_{10_} = L_1 i_{10_} \\ \Phi_{20_} = L_2 i_{20_} \end{cases} \leftrightarrow \quad \Phi_{0_+} = \Phi_{10_} + \Phi_{20_} = \Phi_{0_} \tag{9.79}$$

T.e.m indusă în ochiul Γ ce cuprinde cele două bobine este:

$$e_\Gamma = -\frac{\Delta\Phi_\Gamma}{\Delta t} = -\frac{\Phi_{\Gamma(0+)} - \Phi_{\Gamma(0-)}}{\Delta t} = 0 \tag{9.80}$$

dar la bornele fiecărei bobine se induce câte un impuls de t.e.m, dar cele două impulsuri e_{10} şi e_{20} sunt în opoziție : $e_0 = e_{10} + e_{20} = 0$.

$$\begin{cases} e_{10} = -L_1 \dfrac{\Delta i_{10}}{\Delta t} = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}\left(i_{10_} - i_{20_}\right)\delta(t) \\ e_{20} = -L_2 \dfrac{\Delta i_{20}}{\Delta t} = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}\left(i_{20_} - i_{10_}\right)\delta(t) \end{cases} \tag{9.81}$$

Cele două impulsuri mari de t.e.m solicită însă izolația între spirele bobinelor .

Observaţie:

Dacă sursele fictive corespunzatoare condiţiilor iniţiale pentru elementele L şi C se calculează cu valorile la $t = 0-$:$(u_{C_{0-}}, i_{L_{0-}})$, atunci schemele operaţionale permit să obţinem soluţia corectă, indiferent de tipul comutaţiei (naturală sau forţată).

9.5 Analiza operaţională a circuitelor electrice în regim tranzitoriu pe baza transformatei Fourier

Clasa funcţiilor care admit transformată Fourier este mai mică decât clasa funcţiilor care au transformată Laplace.

Transformata Fourier (imaginea Fourier) *bilaterală* pentru o funcţie original f(t) se defineşte prin:

$$\underline{F}(j\omega) = \underline{F}^{*}(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad (9.82)$$

Pentru ca o funcţie f(t) să admită transformată Fourier trebuie :

- să satisfacă condiţiile Dirichlet (discontinuităţi finite, număr finit de intervale de monotonie).
- să fie *absolut integrabilă* pe intervalul $(-\infty, \infty)$, respectiv integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$ să fie convergentă; aceasta impune anularea funcţiei pentru $t \to \pm\infty$, $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$ respectiv funcţia f(t) să nu persiste în circuit (să fie amortizată) şi exclude posibilitatea ca funcţia f(t) să fie *periodică* (cu perioadă finită). Pe scurt, doar semnalele de *tip impuls* (şi care nu se repetă periodic) admit transformată Fourier.

Pentru funcţii nule la $t < 0$, transformata bilaterală (9.82) devine o *transformată Fourier unilaterală* :

$$\underline{F}(j\omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad (9.83)$$

expresie ce seamănă cu (9.48) care definea transformata Laplace; motiv pentru care se spune că transformata Fourier unilaterală se obţine din transformata Laplace a acelei funcţii pentru $s = j\omega$; $\underline{F}(j\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega}$, cu condiţia ca f(t) să admită transformată Fourier.

Sursele corespunzătoare condițiilor inițiale pentru o bobină sunt de tip impuls: $e_{L_0} = \Phi_o \cdot \delta(t) = Li_o \cdot \delta(t)$, deci admit transformată Fourier iar cele pentru condensatoare: $e_{C_0} = -u_{C_0} \cdot \gamma(t)$ sunt de tip treaptă şi nu admit transformată Fourier. Din acest motiv analiza operațională Fourier este destinată circuitelor liniare aflate în condiții inițiale nule.

Transformata Fourier inversă (integrala Fourier) este:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \underline{F}(j\omega)\, e^{j\omega t} dj\omega \tag{9.84}$$

care poate fi privită ca o descompunere a funcției neperiodice, de tip impuls f(t) într-o infinitate de componente sinusoidale (reprezentate în complex) cu pulsații ce iau toate valorile $(-\infty, \infty)$, deci are un spectru continuu (la semnale periodice aveam dezvoltare în serie Fourier şi spectrul era discret). Modulul $F(\omega) = |\underline{F}(j\omega)|$ se mai numeşte *densitatea spectrală a amplitudinilor*. Din acest motiv analiza operațională Fourier se mai numeşte *analiză spectrală.*

Dacă o funcție g(t) poate fi descompusă într-o componentă pară $g_p(t)$ şi alta impară $g_i(t)$: $g(t) = g_p(t) + g_i(t)$, atunci:

- transformata Fourier a unei funcții reale şi pară de t este o funcție reală şi pară de ω:

$$G_p(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_p(t)\, e^{-j\omega t} dt = 2\int_0^{\infty} g_p(t) \cos \omega t\, dt \tag{9.85}$$

- transformata Fourier a unei funcții reale şi impare de t este o funcție impară şi imaginară de ω:

$$G_i(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_i(t)\, e^{-j\omega t} dt = -j2\int_0^{\infty} g_i(t) \sin \omega t\, dt \tag{9.86}$$

respesctiv:

$$\mathrm{Re}\left[\underline{G}(j\omega)\right] = G_p(j\omega) = R(\omega); \quad \mathrm{Im}\left[\underline{G}(j\omega)\right] = G_i(j\omega) = jX(\omega); \tag{9.87}$$

iar transformata inversă înseamnă:

$$g(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t\, d\omega \; + \; \frac{-2}{\pi}\int_0^{\infty} X(\omega) \sin \omega t\, d\omega \tag{9.88}$$

relație care reprezintă forma trigonometrică a *dezvoltării în integrală Fourier*, analog cu *dezvoltarea în serie Fourier.*

Descompunerea unei funcții f(t) în componentă pară şi impară atrage după sine descompunerea transformatei Fourier într-o componentă reală R(ω) şi una imaginară X(ω): $\underline{F}(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ iar modulul şi faza transformatei sunt:

$$F(\omega) = F(-\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + [-X(\omega)]^2}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{X(\omega)}{R(\omega)} = -\varphi(-\omega) \qquad (9.89)$$

La seria Fourier A_k şi B_k se măsoară în V sau A iar la transformata Fourier R(ω) şi X(ω) se măsoară în V/Hz sau A/Hz.

Aplicarea metodei operaționale Fourier la studiul unui regim tranzitoriu presupune:

- Transformata Fourier unilaterală are proprietățile transformatei Laplace pentru $s = j\omega$ (dacă există transformata) şi prezintă interes practic dacă se cunosc impedanțele operaționale ale elementelor $\left(Z_R = R\ ,\ Z_L = j\omega L\ ,\ Z_C = \frac{1}{j\omega C}\right)$ prin analogie cu impedanțele operaționale Laplace $\left(R\ ;\ sL\ ;\ \frac{1}{sc}\right)$. Deosebirea față de regimul permanent sinusoidal constă în faptul că acolo $\left(R\ ,\ j\omega L\ ,\ \frac{1}{j\omega C}\right)$ erau *numere complexe* iar aici sunt *funcții complexe* de (jω). Aici, pentru o structură mare de circuit, impedanța operațională $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ se poate determina şi pe cale experimentală (prin puncte) făcând măsurarea impedanțelor ca şi în regim sinusoidal dar pentru diverşi $\omega[\omega \in (0, \infty)]$.
- Deoarece pentru $t \to \infty$ toate mărimile trebuie să tindă la zero, înseamnă că se pot studia numai acele regimuri tranzitorii care nu au componentă permanentă.

- Dezvoltarea în integrală Fourier fiind interpretată ca o descompunere în componente armonice (sinusoidale) elementare, studiul se face aplicând teorema superpoziției.
- Considerăm un dipol liniar, pasiv şi în repaus ($x_i(t) = 0$ pentru $t < 0$) căruia i se aplică la momentul $t = 0$ mărimea de intrare $x_i(t)$ a cărei transformată Fourier este:

$$\underline{X}_i(j\omega) = \int_0^{\infty} x_i(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = X_i(s)\big|_{s=j\omega} \qquad (9.90)$$

Dacă $\underline{H}(j\omega)$ este *funcţia de transfer* a dipolului, atunci transformata Fourier a mărimii de ieşire este: $\underline{X}_e(j\omega) = \underline{H}(j\omega)\cdot\underline{X}_i(j\omega)$ iar mărimea de ieşire se scrie sub forma:

$$x_e(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(j\omega)\cdot\underline{X}_i(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \underline{X}_e(j\omega)\, e^{j\omega t}\, dj\omega \qquad (9.91)$$

$\underline{H}(j\omega)$ poate avea caracter de: impedanţă, admitanţă sau funcţie complexă după cum x_i şi x_e sunt ambele tensiuni sau curenţi sau una tensiune, cealaltă curent.

- Avantajul metodei operaţionale Fourier constă în faptul că se

operează cu funcţii de circuit $\underline{H}(j\omega)$ formal identice cu cele din regimul permanent sinusoidal dar care pot fi determinate pe cale experimentală la diverse frecvenţe (ω) şi apoi le aproximez analitic. Funcţia $\underline{H}(j\omega)$ se interpretează ca răspunsul circuitului la o excitaţie sub formă de impuls Dirac: dacă $x_i = \delta(t)$, atunci $\underline{X}_i = 1$ iar $\underline{X}_e = \underline{H}(j\omega)$.

Aplicaţie:

Unui circuit RL aflat în condiţii iniţiale nule i se aplică la momentul $t = 0$ un impuls dreptunghiular de tensiune. Să se determine răspunsul i(t).

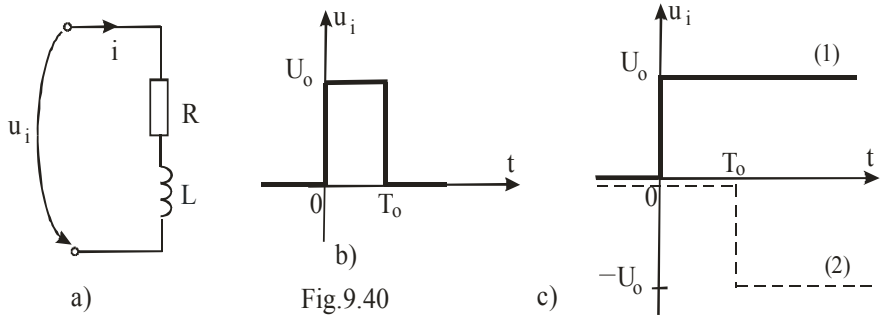


Fig.9.40

Semnalul $u_i(t)$ se consideră că provine din superpoziţia a două drepte translatate (figura 9.40-c):

$$u_i(t) = U_o\left[\gamma(t) - \gamma(t - T_o)\right] \qquad (9.92)$$

şi fiind un semnal impuls satisface condiţia de a avea transformată Fourier:

$$\underline{U}_i(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i(t)e^{-j\omega t}dt = U_o\int_0^{T_o} e^{-j\omega t}dt = \frac{U_o}{j\omega}\left(1-e^{-j\omega T_o}\right) \qquad (9.93)$$

Impedanţa operaţională a circuitului este: $\underline{Z}(j\omega) = R + j\omega L$ iar răspunsul circuitului este:

$$\underline{I}(j\omega) = \frac{\underline{U}_i(j\omega)}{\underline{Z}(j\omega)} = \frac{U_o}{j\omega(R+j\omega L)}\left(1-e^{-j\omega T_o}\right) \qquad (9.94)$$

Pentru a determina răspunsul original i(t) vom descompune pe $\underline{I}(j\omega)$ în fracţii simple:

$$\underline{I}(j\omega) = \frac{U_o}{R}\left[\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega + \frac{R}{L}}\right]\cdot\left(1-e^{-j\omega T_o}\right)$$

Deci curentul absorbit (originalul lui $\underline{I}(j\omega)$) va fi:

$$i(t) = \frac{U_o}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)\gamma(t) - \frac{U_o}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}(t-T_o)}\right)\gamma(t-T_o) = i_1(t) + i_2(t) \quad (9.95)$$

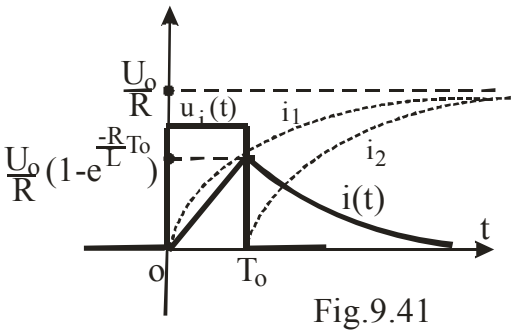


Fig.9.41

Soluţia este reprezentată grafic în figura 9.41; curentul i(t) este suprapoziţia celor doi curenţi i_1 şi i_2 translataţi cu T_o.

9.6 Analiza circuitelor electrice în regim tranzitoriu în domeniul timp

Metodele de analiză în domeniul timp se aplică circuitelor liniare, pasive şi aflate în condiţii iniţiale nule, atunci când la intrare se aplică un semnal $x_i(t)$ nu prea complicat ca formă sau îl pot aproxima prin suprapunerea unor semnale cu variaţie simplă.

9.6.1 Răspunsul unui circuit la o excitație dată în funcție de răspunsul circuitului la o treaptă unitate (metoda integralei Duhamel)

Semnalul de intrare $x_i(t)$ îl descompunem într-o succesiune de trepte retardate cu câte dτ şi de înălțimi dx_i (ca în figura 9.42-b,c) în care : $dx_i = x_i'(\tau)d\tau$ iar prima treaptă: $x_i(0_+)\cdot\gamma(t)$ este dată de valoarea semnalului de intrare x_i în momentul $t = 0$.

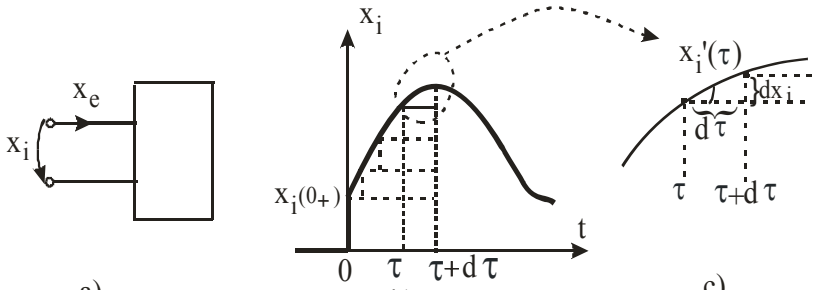


Fig.9.42

Semnalul de intrare $x_i(t)$ se scrie ca o superpoziție a acestor trepte retardate.

$$x_i(t) = x_i(0_+)\gamma(t) + \int_0^t x_i'(\tau)\cdot\gamma(t-\tau)d\tau \qquad (9.96)$$

Dacă se cunoaşte răspunsul circuitului dat f(t) la semnalul treaptă unitate aplicat la intrare γ(t), atunci putem determina răspunsul la orice semnal aproximabil prin trepte. Funcția f(t) care reprezintă răspunsul la treapta unitate se numeşte *răspuns tranzitoriu (funcție indicială)* şi poate fi calculată pentru un circuit dat prin orice altă metodă.

$\gamma(t) \to f(t)$ -răspunsul la treapta unitate

$A\gamma(t) \to Af(t)$ -răspunsul la treapta de înălțime (valoarea) A.

$x_i'(\tau)\,\gamma(t-\tau) \to x_i'(\tau)\,f(t-\tau)$ -răspunsul la treapta translatată cu τ şi de valoare $x_i'(\tau)$.

Atunci, aplicând teorema superpoziției, răspunsul la semnalul $x_i(t)$ aproximabil prin trepte sub forma (9.96) va fi:

$$x_e(t) = x_i(0_+)\,f(t) + \int_0^t x_i'(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau \qquad (9.97)$$

Printr-o schimbare de variabilă, produsul de convoluţie din (9.97) se scrie sub forma:

$$x_e(t) = x_i(0_+)\, f(t) + \int_0^t x_i'(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau \qquad (9.98)$$

iar integrând prin părţi în (9.97) şi (9.98) se obţin formele duale:

$$x_e(t) = x_i(t)\, f(0_+) + \int_0^t x_i(\tau)\, f'(t-\tau)\, d\tau \qquad (9.99)$$

$$x_e(t) = x_i(t)\, f(0_+) + \int_0^t x_i(t-\tau)\, f'(\tau)\, d\tau \qquad (9.100)$$

Formele (9.99) şi (9.100) se pot aplica şi când semnalul $x_i(t)$ are discontinuităţi de prima speţă întrucât nu apare derivata sa.Deasemenea se preferă una dintre cele patru forme de calcul a răspunsului (9.97, 9.98, 9.99, 9.100) în funcţie de forma lui $x_i(t)$ şi funcţia indicială f(t), respectiv care dintre aceste relaţii duc la un volum minim de calcul.

Observaţii:

Dacă $F_1(s)$ si $F_2(s)$ sunt transformatele Laplace ale funcţiilor $f_1(t)$ şi $f_2(t)$ atunci imaginii $F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$ îi corespunde (conform teoremei lui Borell) originalul f(t) dat de un produs de convoluţie:

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \qquad (9.101)$$

iar funcţiei imagine : $F(s) = s\, F_1(s) \cdot F_2(s)$, conform teoremei lui Duhamel, îi corespunde originalul:

$$f(t) = \frac{d}{dt} \cdot \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau \qquad (9.102)$$

Expresia (9.102) dezvoltată duce la formele (9.97)….(9.100).

Dacă la intrarea unui circuit aflat în repaus se aplică la momentul $t = 0$ o treaptă de tensiune $\gamma(t)$, atunci la ieşire apare curentul f(t). În acest caz răspunsul tranzitoriu al circuitului f(t) reprezintă o *admitanţă indicială.* Aplicând o treaptă de curent , la ieşire apare tensiunea $f_1(t)$, care este în acest caz o *impedanţă indicială*. Dacă la intrare se aplică o treaptă de tensiune şi răspunsul este tot tensiune $f_2(t)$, atunci $f_2(t)$ este *funcţie de transfer tranzitorie.*

Dacă imaginea treptei unitate este $\frac{1}{s}$ iar F(s) este imaginea lui f(t),

atunci când se aplică u(t) şi răspunsul este i(t), putem scrie : $I(s) = U(s)Y(s)$.

Răspunsul tranzitoriu scris cu Laplace este : $F(s) = \frac{1}{s}Y(s) = \frac{1}{s}\frac{I(s)}{U(s)}$,

respectiv răspunsul i(t) este de forma (9.102).

$$I(s) = sF(s)U(s) \rightarrow i(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t u(\tau)f(t-\tau)d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (9.103)$$

Dezvoltând (9.103) se obțin chiar expresiile (9.97), (9.98), (9.99) şi (9.100).

Metoda integralei Duhamel este utilă mai ales atunci când se cunoaşte expresia funcției indiciale (răspunsul tranzitoriu) f(t). Logica metodei s-ar prezenta sub forma :" Vrei să ştii cum răspunde circuitul la un semnal $x_i(t)$? Spune-mi cum răspunde circuitul la o treaptă unitate (adică cine este f(t)) , c-apoi îți spun eu cum răspunde la orice semnal $x_i(t)$ aproximabil prin trepte translatate".

Circuitul RC: Dacă se conectează la o sursă de tensiune continuă de valoare E^V atunci $u(t) = E\,\gamma(t)$ iar răspunsul în curent i şi în tensiune u_C este de forma: (9.26) şi (9.27):

$$i = \frac{E}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}} \qquad u_C = E(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad (9.104)$$

Când se aplică o treaptă unitate $(E = 1V)$ atunci : $u = \gamma(t)$ şi răspunsul tranzitoriu va fi de forma:

$$f_i(t) = \frac{1}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}} \quad ; \quad f_u(t) = 1-e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (9.105)$$

Circuitul RL : Cuplarea circuitului la o tensiune continuă : $u = E\cdot\gamma(t)$, are răspunsul de forma: (9.16), (9.18):

$$i = \frac{E}{R}\,(1-e^{-\frac{R}{L}t}) \quad ; \quad u_L = L\frac{di}{dt} = E\,e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (9.106)$$

A aplica o treaptă unitate de tensiune este echivalent cu a cupla circuitul la o sursă cuE =1V,răspunsul tranzitoriu în curent $f_i(t)$ şi în tensiune $f_u(t)$ vor fi:

$$f_i(t) = \frac{1}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t}) \quad ; \quad f_u(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (9.107)$$

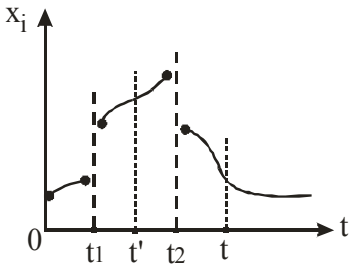


Fig.9.43

Dacă semnalul de intrare $x_i(t)$ prezintă discontinuităţi ca în figura 9.43 , atunci răspunsul circuitului calculat cu integrala Duhamel este de forma :

$$x_e(t) = \left[x_i(0)f(t) + \int_0^{t_1} x_i'(\tau)\, f(t-\tau)d\tau \right] +$$

$$+ \left\{ \left[x_i(t_{1+}) - x_i(t_{1-}) \right] f(t-t_1)\gamma(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} x_i'(\tau)\, f(t-\tau)d\tau \right\} \qquad (9.108)$$

$$+ \left\{ \left[x_i(t_{2+}) - x_i(t_{2-}) \right] f(t-t_2)\, \gamma(t-t_2) + \int_{t_2}^{t} x_i'(\tau)\, f(t-\tau)d\tau \right\}$$

Expresia (9.108) este adevărată dacă ne interesează răspunsul la un moment $t > t_2$ iar dacă ne interesează pentru $t' \in (t_1, t_2)$ atunci ultimul termen din (9.108) va lipsi iar la termenul al doilea limita superioară a integralei este t' şi nu t_2.

O discontinuitate cu salt (+) ca în momentul t_1 ,este privită ca o treaptă pozitivă, de valoare egală saltul funcţiei care apare în momentul t_1 iar un salt (-), ca în momentul t_2, este privită ca o treptă negativă ce apare în acel moment.(tratarea discontinuităţilor de speţă I).

9.6.2 Răspunsul unui circuit la un semnal dat în funcţie de răspunsul circuitului la un impuls unitate

Impulsul unitate δ(t) permite exprimarea oricărei funcţii y(t), în punctele ei de continuitate, prin integrala:

$$y(t) = \int_0^t y(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \qquad (9.109)$$

Aceasta se poate interpreta ca o descompunere a funcției y(t) într-o succesiune de componente $\big(y(\tau)d\tau\big)\cdot\delta(t-\tau)$ reprezentând fiecare câte un impuls de arie (valoare) „ $y(\tau)d\tau\cdot$ ” care apare în momentul $t=\tau$, deoarece această componentă este nulă pentru $\tau\neq t$ şi egală cu y(t) pentru $\tau=t$, deci o succesiune infinită de impulsuri aşezate alături, fiecare egal cu valoarea funcției în acel punct. Deci o mărime de intrare $x_i(t)$ se poate descompune într-o succesiune de impulsuri finite şi retardate sub forma:

$$x_i(t)=\int_0^t x_i(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \qquad (9.110)$$

Dacă v(t) este răspunsul unui circuit cu condiții inițiale nule la un semnal impuls unitate δ(t), numit *răspuns tranzitoriu la impuls unitate*, atunci, ținând seama de caracterul liniar al circuitului, considerăm că:

$\delta(t)\rightarrow v(t)$ - răspunsul la impulsul unitate ce apare în momentul $t=0$

$A\delta(t-\tau)\rightarrow Av(t-\tau)$ -răspunsul la impulsul de arie A ce apare translatat cu τ

$x_i(\tau)\,\delta(t-\tau)\rightarrow x_i(\tau)\,v(t-\tau)$ - răspunsul la impulsul de valoare $x_i(\tau)$ ce apare translatat cu τ.

Cu teorema superpoziției, răspunsul la o infinitate de impulsuri translatate cu câte dτ, sub forma(9.110) se scrie astfel:

$$x_e(t)=\int_0^t v(t-\tau)x_i(\tau)d\tau \quad ; \quad x_e(t)=\int_0^t v(\tau)x_i(t-\tau)d\tau \qquad (9.111)$$

Aceste relații (9.111) se pot aplica numai dacă în intervalul $(0-t)$funcția de intrare (excitația) $x_i(t)$ este continuă. Dacă $x_i(t)$ conține un număr finit de puncte de discontinuitate, acestea se separă şi răspunsul la acestea (privite ca trepte de tensiune) se calculează separat.

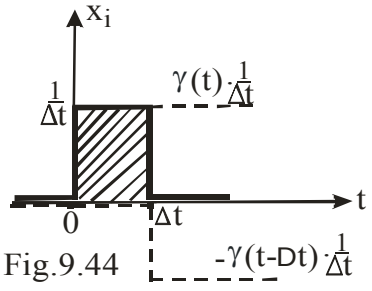


Fig.9.44

Un impuls unitate (aria = 1 şi durata $\Delta t<<$)din figura 9.44 poate fi privit ca o superpoziție de două trepte:

$$x_i(t)=\frac{1}{\Delta t}\big[\gamma(t)-\gamma(t-\Delta t)\big]=\gamma'(t) \qquad (9.112)$$

iar răspunsul v(t) la acest impuls va fi:

$$v(t)=\frac{1}{\Delta t}\big[f(t)-f(t-\Delta t)\big]=f'(t) \qquad (9.113)$$

Deci răspunsul la impulsul unitate v(t) este derivata funcției indiciale f(t) (răspunsul la treapta unitate) : $v(t) = f'(t)$.

9.6.3 Răspunsul unui circuit la un semnal dat în funcție de răspunsul la un semnal rampă unitate

Semnalul rampă unitate r(t) (de pantă: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$), rampă oarecare (de pantă $k = \operatorname{tg}\alpha$)şi rampă translatată, se definesc cum se indică în figura 9.45:

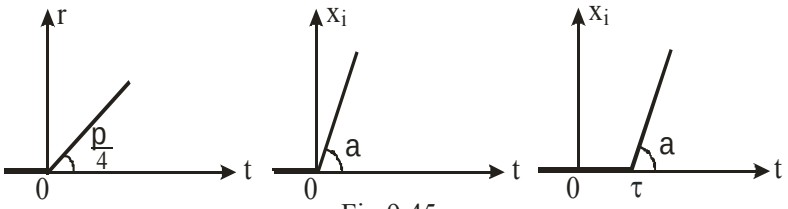


Fig.9.45

$r(t) = t \cdot \gamma(t)$ $\quad x_i = k \cdot t \cdot \gamma(t)$, $k = \operatorname{tg}\alpha$ $\quad x_i = k \cdot (t-\tau) \cdot \gamma(t-\tau)$, $k = \operatorname{tg}\alpha$

Dacă se cunoaşte răspunsul unui circuit liniar, cu condiții inițiale nule, la semnalul rampă unitate r(t) ca fiind g(t), atunci semnalul continuu $x_i(t)$ se poate descompune într-un număr finit (n) de rampe translatate (ca o aproximare a unei funcții prin segmente, pe porțiuni):

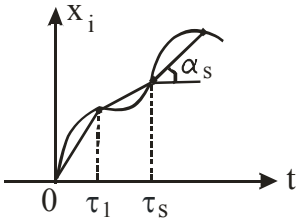


Fig.9.46

$$x_i(t) = \sum_{s=0}^{n} k_s \cdot (t-\tau_s) \cdot \gamma(t-\tau_s) \qquad (9.114)$$

$$\begin{cases} \tau_s = \text{translatarea rampei} \\ k_s = \operatorname{tg}\alpha_s - \text{panta rampei (valoarea sa)} \\ n = \text{numarul de intervale de aproximare} \end{cases}$$

Răspunsul circuitului la acest semnal (9.114) va fi o superpoziție de forma:

$$x_e(t) = \sum_{s=0}^{n} k_s \cdot g(t-\tau_s) \cdot \gamma(t-\tau_s) \qquad (9.115)$$

soluții care trebuie racordate între ele pe fiecare interval de aproximare.

Cum între impuls, treaptă şi rampă unitate există legătura:

$$\delta(t) = \gamma'(t) = r''(t) \qquad (9.116)$$

atunci între răspunsurile tranzitorii la aceste semnale va fi legătura:

$$v(t) = f'(t) = g''(t) \qquad (9.117)$$

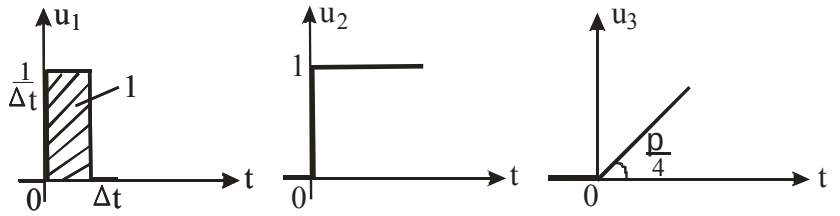
deci este suficient dacă-l cunosc pe unul dintre cele trei răspunsuri tranzitorii pentru un circuit dat.

Observații:

- Problema se poate generaliza, când pe cele n intervale aproximarea nu se face prin rampe (segmente de dreaptă)ci prin polinoame de gradul m. Dacă aproximăm prima derivată a lui $x_i(t)$ prin segmente (înseamnă a aproxima funcția $x_i(t)$ prin arce parabolice) eroarea de aproximare se reduce de 5 ori față de aproximarea directă a funcției.
- În metode directe mărimile $\tau = RC$ şi $\tau = \frac{L}{R}$ reprezintă *constanta de timp* a circuitului RC sau RL serie iar în metodele de analiză în domeniul timp, τ este *variabila de integrare* si τ_o sau T_o sunt utilizate ca notații pentru constanta de timp.

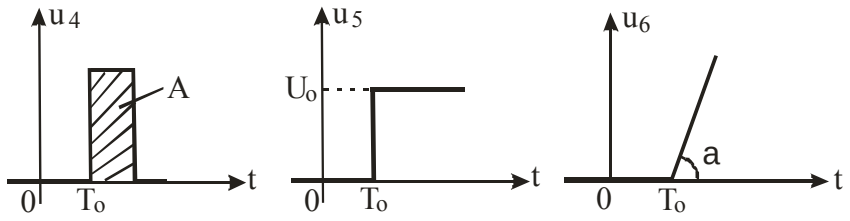
9.7 Aplicații

1. Pentru câteva „semnale tip” desenate (date sub formă grafică), să se scrie expresia lor u(t) şi expresia transformatei Laplace a lor U(s).



(impuls unitate) (treptă unitate) (rampă unitate)

$$u_1 = \delta(t) \rightarrow U_1 = 1 \; ; \quad u_2 = \gamma(t) \rightarrow U_2 = \frac{1}{s} \; ; \; u_3 = r(t) = t \cdot \gamma(t) \rightarrow U_3 = \frac{1}{s^2}$$

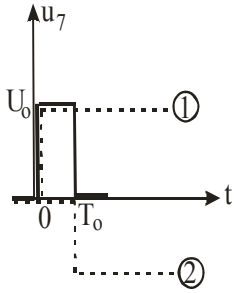


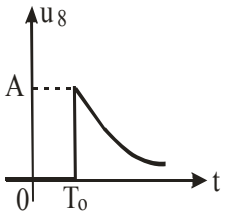
(impuls translatat cu T_o) (treaptă translatată) (rampă translatată)

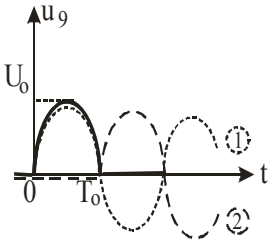
(impuls translatat cu T_o) $\begin{cases} u_4 = A \cdot \delta(t - T_o) \\ U_4 = Ae^{-sT_o} \end{cases}$

(treptă translatată) $\begin{cases} u_5 = U_o \cdot \gamma(t - T_o) \\ U_5 = \dfrac{U_o}{s} e^{-sT_o} \end{cases}$

(rampă translatată) $\begin{cases} u_6 = r(t - T_o) \cdot tg\alpha = (t - T_o) tg\alpha \cdot \gamma(t - T_o) \\ U_6 = \dfrac{1}{s^2} e^{-sT_o} tg\alpha \end{cases}$





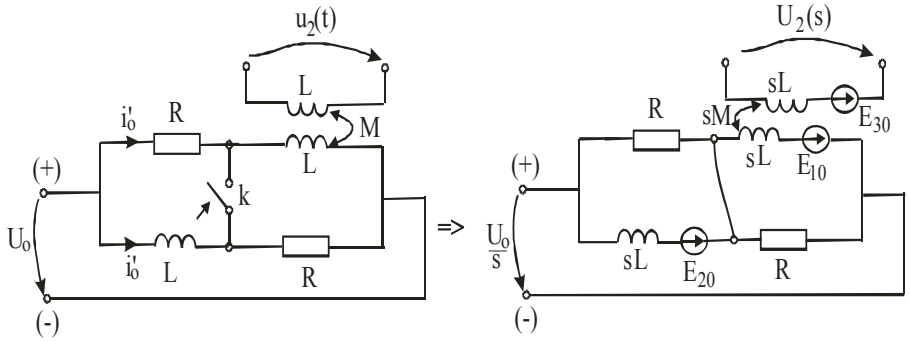


(impuls de durată) (impuls exponențial) (impuls sinusoidal)

$\begin{cases} u_7 = U_o[\gamma(t) - \gamma(t - T_o)] \\ U_7 = \dfrac{U_o}{s}\left(1 - e^{-sT_o}\right) \end{cases}$ $\begin{cases} u_8 = Ae^{-\alpha(t-T_o)} \cdot \gamma(t - T_o) \\ U_8 = \dfrac{A}{s + \alpha} e^{-sT_o} \end{cases}$

(impuls sinusoidal) $\begin{cases} u_9 = U_o[\gamma(t)\sin\omega t + \gamma(t - T_o)\sin\omega(t - T_o)] \\ U_9 = U_o \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}\left(1 + e^{-sT_o}\right); \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2T_o} \end{cases}$

2. La momentul $t = 0$ se închide k din figura 9.47. Se cere expresia tranzitorie pentru $u_2(t)$.



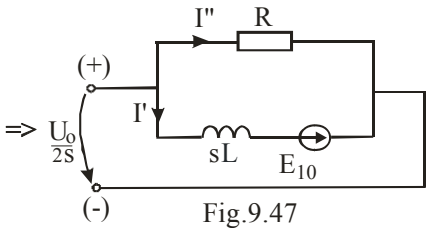


Fig.9.47

$\begin{cases} U_o = 10V \ ; \ R = 1\Omega \\ L = 1H \ ; \ M = 0{,}1H \end{cases}$

În le fictive au valorile: $E_{10} = E_{20} = Li_o^{'} = L\frac{U_o}{R} = 10V$ şi $E_{30} = Mi_o^{'} = 1V$. Curentul $I^{'}(s)$ şi tensiunea $U_2(s)$ au expresiile: $I^{'}(s) = \frac{\frac{U_o}{2s} + E_{10}}{sL} = \frac{\frac{5}{s} + 10}{s}$

$$U_2(s) = s\,M\,I^{'}(s) - E_{30} = 0{,}1s\left(\frac{5}{s^2} + \frac{10}{s}\right) - 1 = \frac{0{,}5}{s} \rightarrow u_2(t) = 0{,}5 \cdot \gamma(t)$$

3.Circuitul din figura 9.4.8 funcționează în regim permanent. La momentul $t = 0$ se deschide contactul k. Se cer expresiile curenților i_1 şi i_2.

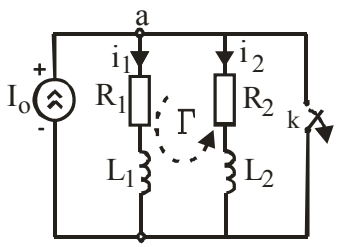


Fig.9.48

$\begin{cases} R_1 = 2R_2 = 2\,\Omega \\ L_1 = 2L_2 = 2\,mH \\ I_o = 3\,A \end{cases}$

În nodul (a) concură o sursă de curent şi laturi cu bobine, deci va apare o comutație forțată: $i_1(0-) = i_2(0-) = 0$,bobinele erau şuntate de k, iar $i_1(0+) + i_2(0+) = I_o$,deci are loc o comutație forțată,cei doi curenți i_1 şi i_2 vor avea un salt în momentul $t = 0$.

Aplicăm (9.74) pe curba Γ:

$$\underbrace{L_1 i_{10-} - L_2 i_{20-}}_{\Phi_\Gamma(0-)} = \underbrace{L_1 i_{10+} - L_2 i_{20+}}_{\Phi_\Gamma(0+)}$$

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = I_o \ \rightarrow \ \frac{di_2}{dt} = -\frac{di_1}{dt} \\ R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}; \ (i_2 = I_o - i_1) \end{cases}$$

Sau: $\begin{cases}(L_1+L_2)\dfrac{di_1}{dt}+(R_1+R_2)i_1=R_2I_o\\ \tau_o=\dfrac{L_1+L_2}{R_1+R_2}=1ms\end{cases}\rightarrow\begin{cases}i_1=I_o\dfrac{R_2}{R_1+R_2}+Ae^{-t/\tau_o}\\ i_2=I_o\dfrac{R_1}{R_1+R_2}-Ae^{-t/\tau_o}\end{cases}$

$$\Phi_\Gamma(0_-)=\Phi_\Gamma(0_+)\rightarrow 0=L_1\left(A+\frac{R_2I_o}{R_1+R_2}\right)-L_2\left(\frac{R_1I_o}{R_1+R_2}-A\right)$$

$$\Rightarrow A=I_o\frac{L_2R_1-L_1R_2}{(R_1+R_2)(L_1+L_2)}=1$$

Dacă $\dfrac{L_1}{R_1}=\dfrac{L_2}{R_2}(\tau_1=\tau_2)\Rightarrow$ circuitul nu va trece prin regim tranzitoriu $(A=0)$.

În cazul nostru cei doi curenți sunt: $\begin{cases}i_1=1+e^{-1000t}\\ i_2=2-e^{-1000t}\end{cases}$ a căror reprezentare este în figura 9.49

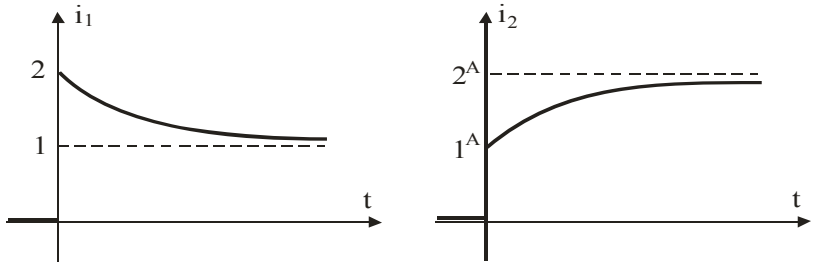


Fig 9.49

4.Circuitul din figura 9.50 funcționează în regim permanent iar la momentul $t=0$ se închide contactul k. Se cere expresia tranzitorie $u_g(t)$ a tensiunii la bornele sursei de curent din schemă.

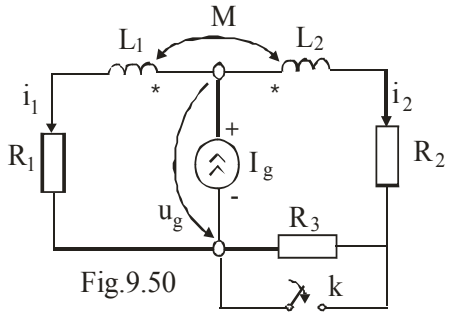
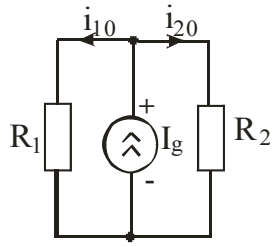


Fig.9.50

$$\begin{cases}R_1=2\Omega\\ R_2=R_3=4\Omega\\ L_1=2H\\ L_2=M=1H\\ I_g=10A\end{cases}$$



Condițiile inițiale ale celor doi curenți sunt:

$$\begin{cases} i_{10} = I_g \dfrac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 8A \\ i_{20} = I_g \dfrac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = 2A \end{cases}$$

Sursele fictive care se introduc în schema operațională au valorile:

$$\begin{cases} E_{10} = \Phi_{10} = L_1 i_{10} + M\, i_{20} = 18Wb \rightarrow E_{10} = 18V \\ E_{20} = \Phi_{20} = L_2 i_{20} + M\, i_{10} = 10Wb \rightarrow E_{20} = 10V \end{cases}$$

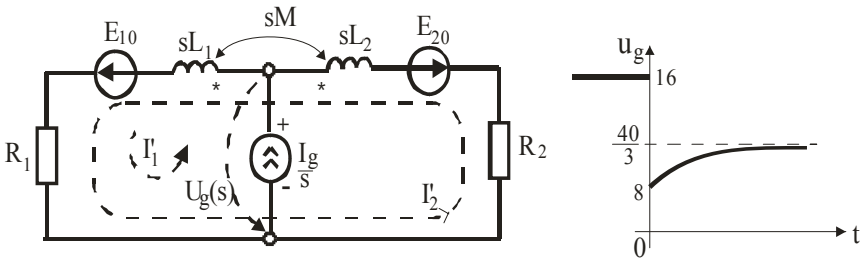


Fig 9.51

Schema operațională din figura 9.51 o rezolvăm prin metoda curenților ciclici; alegem latura cu sursă ideală de curent drept coardă, deci: $I_1' = \dfrac{I_g}{s} = \dfrac{10}{s}$ iar ecuația pentru ochiul al doilea este:

$$I_2'\left[(R_1 + R_2) + s(L_1 + L_2 - 2M)\right] + I_1'(R_1 + sL_1 - sM) = E_{10} - E_{20}$$

$$\rightarrow I_2' = \frac{2(s+10)}{s(s+6)}$$

Tensiunea $U_g(s)$, scrisă pe latura din stânga are expresia:

$$(R_1 + sL_1)I_1 + sMI_2 - U_g = E_{10} \rightarrow U_g(s) = \frac{8s+80}{s(s+6)} \rightarrow$$

$$\rightarrow u_g(t) = \frac{80}{6} + \frac{32}{-6}e^{-6t} = \frac{1}{3}\left(40 - 16e^{-6t}\right)\cdot\gamma(t)$$

a cărei expresie $u_g(t)$ este reprezentată în figura 9.51.

5. În circuitul din figura 9.52 se închide k iar după stabilizarea regimului permanent se deschide din nou k. Se cer expresiile tranzitorii ale curenților în cele două regimuri tranzitorii.

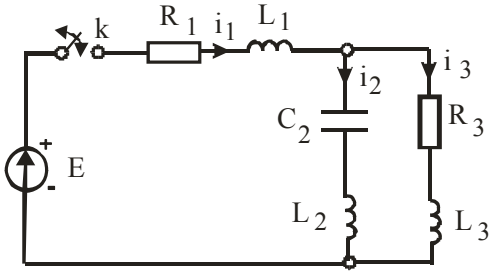


Fig 9.52

$$\begin{cases} R_1 = R_3 = 100\Omega \\ L_1 = L_3 = 0{,}1H \\ C_2 = 250\mu F \\ L_2 = 0{,}05H \\ E = 100V \end{cases}$$

a)Pentru primul regim tranzitoriu, condițiile inițiale înainte de a închide k sunt nule:

$$E_{Lo} = Li_o = 0 \;\; ; \;\; E_{C_o} = \frac{q_o}{sC} = 0$$

Impedanța operațională în raport cu bornele sursei (circuit operațional pasiv, toate elementele aveau condiții inițiale nule) este:

$$Z(s) = (R_1 + sL_1) + \frac{(R_3 + sL_3)\left(sL_2 + \frac{1}{sC_2}\right)}{R_3 + s(L_2 + L_3) + \frac{1}{sC_2}} = \frac{(100 + 0{,}1s)(0{,}2s^2 + 100s + 8000)}{0{,}15s^2 + 100s + 4000}$$

Curentul tranzitoriu debitat de sursă (operațional) are expresia:

$$I_1(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{100/s}{Z(s)} = \frac{0{,}5}{s} + \frac{-0{,}5}{s+1000} + \frac{0{,}83}{s+400} + \frac{0{,}83}{s+100}$$

iar originalul său este de forma:

$$i_1(t) = 0{,}5 - 0{,}5e^{-1000t} + 0{,}83\left(e^{-400t} + e^{-100t}\right)$$

În regim permanent $(t \to \infty)$ se vor stabiliza curenții:

$i_{1p} = i_{3p} = 0{,}5A \;\; ; \;\; i_{2p} = 0 \;\; ; \;\; u_{Cp} = R_3 i_{3p} = 50V$

b)Pentru al doilea regim tranzitoriu (se deschide k) condițiile inițiale sunt date de valorile de regim permanent ale regimului precedent :

$i_{30_} = 0{,}5A \;\; ; \;\; i_{20_} = 0 \;\; ; \;\; u_{Co_} = 50V \;\; ; \;\; \Phi_{30} = L_3 i_{30} = 0{,}05Wb$

După deschiderea lui k, în schema operațională rămân doar laturile 2 şi 3 ca în figura 9.53.

Curentul operațional este: ($E_{20} = L_2 i_{20-} = 0$):

$$I_3(s) = \frac{sE_{30} + u_{Co}}{s^2(L_2 + L_3) + sR_3 + \frac{1}{C_2}} = \frac{0{,}05s + 50}{0{,}15s^2 + 100s + 4000};$$

$$I_3(s) = \frac{0{,}549}{s + 42{,}7} - \frac{0{,}216}{s + 624}$$

$$i_3(t) = \left(0{,}549e^{-42{,}7t} - 0{,}216e^{-624t}\right) \cdot \gamma(t)$$

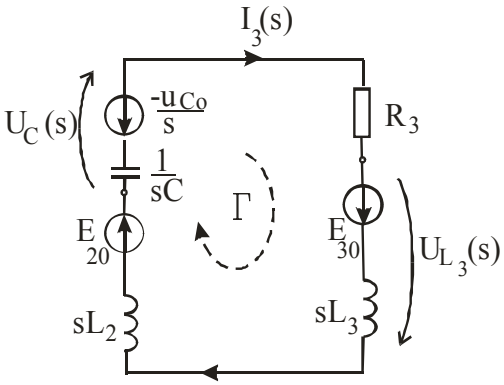


Fig.9.53

Valoarea curentului $i_3(t)$ la momentul 0_- era: $i_3(0-) = 0{,}5A$ iar la momentul 0_+ este:

$$i_3(0_+) = \lim_{s\to\infty} sI_3(s) = 0{,}333 = \frac{1}{3}$$

deci bobina L_3 va suferi o comutație forțată (L_2 şi L_3 cu condiție diferită la 0- au ajuns în serie, figura 9.53). Aplicăm teorema condiției inițiale (9.76) pentru curba Γ :

$$\Phi_\Gamma(0_-) = \Phi_\Gamma(0_+) \rightarrow L_2 i_{20_-} + L_3 i_{30_-} = L_2 i_{20_+} + L_3 i_{30_+};$$

$$i_{30_+} = i_{20_+} = 0{,}333A = \frac{1}{3}$$

$$0 + \underbrace{0{,}1 \cdot 0{,}5}_{0{,}05} = \underbrace{(0{,}05 + 0{,}1) \cdot \frac{1}{3}}_{0{,}05}$$

Deci se verifică teorema condițiilor inițiale pentru comutația forțată a lui L_2 şi L_3.

6. Să se arate în ce condiţii un circuit de derivare (integrare) operează corect.

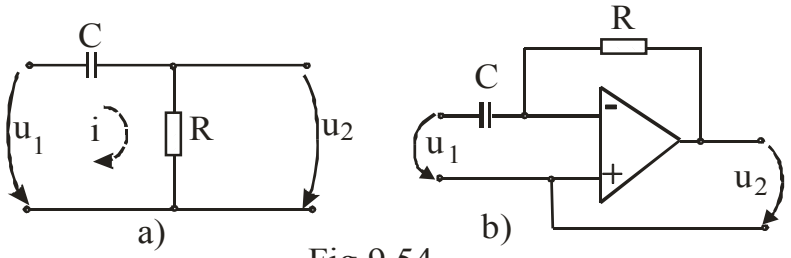


Fig.9.54

Pentru *circuitul de derivare* din figura 9.54-a, dacă R<<, se poate scrie:

$$u_1 \approx \frac{1}{C}\int i\,dt \rightarrow i = C\frac{du_1}{dt}$$

$$u_2 = R\,i = RC\frac{du_1}{dt} = \tau_o \frac{du_1}{dt}$$

Deci tensiunea de ieşire u_2 este proporţională cu derivata tensiunii de intrare.

Dar u_2 este de valoare foarte mică şi trebuie amplificată ca în figura 9.54-b

Cu transformata Fourier putem scrie:

$$\underline{U}_2(\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}\underline{U}_1(\omega) = \frac{j\omega\tau_o}{1 + j\omega\tau_o}\underline{U}_1(\omega)$$

Funcţiile de transfer ale circuitului sunt:

$$\underline{H}_{ideal} = j\omega\tau_o \quad ; \quad \underline{H}_{real} = \frac{j\omega\tau_o}{1 + j\omega\tau_o}$$

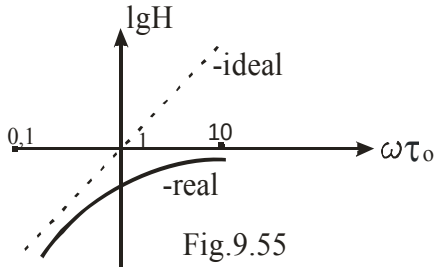
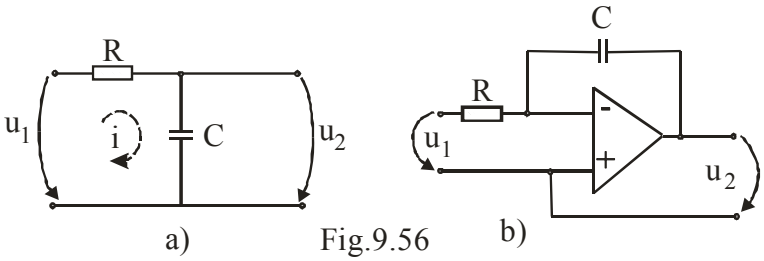


Fig.9.55

În figura 9.55 se vede că circuitul de derivare real se apropie de cel ideal pentru $\omega\tau_o << 1$, respectiv dacă $R << \frac{1}{\omega C}$, condiţie ca să realizăm o bună derivare.

Pentru *circuitul de integrare* din figura 9.56-a dacă R>>, se poate scrie:

$$u_1 \cong R\,i \rightarrow u_2 = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{1}{RC}\int u_1\,dt = \frac{1}{\tau_o}\int u_1\,dt$$



a) Fig.9.56 b)

Tensiunea u_2 este integrala lui $u_1(t)$ dar este foarte mică şi trebuie amplificată ca în figura 9.56-b.
Cu transformata Fourier putem scrie:

$$\underline{U}_2(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}\underline{U}_1(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_o}\underline{U}_1(\omega)$$

Funcția de transfer pentru circuitul de integrare este:

$$\underline{H}_{ideal} = \frac{1}{j\omega\tau_o}\ ; \quad \underline{H}_{real} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_o}$$

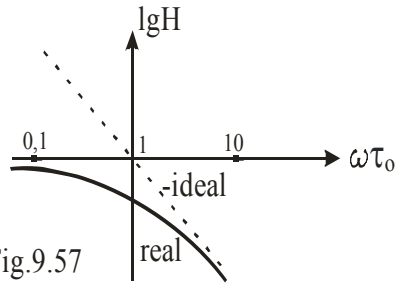


Fig.9.57

Cele două funcții se apropie ca în figura 9.57 dacă:

$$\omega\tau_o >> 1 \leftrightarrow \omega RC >> 1 \rightarrow R >> \frac{1}{\omega C},$$

care este ipoteza pentru a se realiza o bună integrare.

7. Unui circuit RL i se aplică un impuls triunghiular ca în figura 9.58-b. Se cere răspunsul i(t).

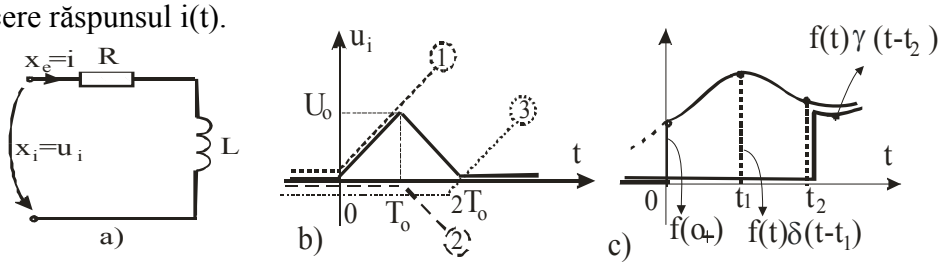


Fig.9.58

Semnalul $u_i(t)$ de forma unui impuls triunghiular se consideră că provine din suprapunarea a trei semnale rampă, ca în figura 9.58-b, (unde $tg\alpha = \frac{U_o}{T_o}$):

$$u_i(t) = \frac{U_o}{T_o}\left[t\cdot\gamma(t) - 2(t-T_o)\cdot\gamma(t-To) + (t-2T_o)\cdot\gamma(t-2T_o)\right]$$

semnal care admite transformata Laplace: $U_i(s) = \frac{U_o}{T_o}\cdot\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-sT_o}\right)^2$

Funcția indicială (răspunsul tranzitoriu, răspunsul la treapta unitate) pentru circuitul RL este de forma (9.107):

$$f(t) = \frac{1}{R}\left(1-e^{-t/\tau_o}\right)\ ;\ \left(\tau_o = \frac{L}{R}\right)\ ;\ f(0)=0\ ;\ f'(\tau) = \frac{1}{L}e^{-\tau/\tau_o}$$

Atunci răspunsul calculat cu (9.100) se scrie sub forma:

$$x_e(t) = i(t) = \underbrace{\frac{U_o}{LT_o}\int_0^t (t-\tau)e^{-\tau/\tau_o}\cdot\gamma(t-\tau)d\tau}_{i_1} -$$

$$\underbrace{-\frac{2U_o}{LT_o}\int_0^t (t-\tau-T_o)e^{-\tau/\tau_o}\cdot\gamma(t-\tau-T_o)d\tau}_{i_2} +$$

$$\underbrace{+\frac{U_o}{LT_o}\int_0^t (t-\tau-2T_o)e^{-\tau/\tau_o}\cdot\gamma(t-\tau-2T_o)d\tau;}_{i_3}$$

unde:

$$\begin{cases} t < T_o : i_2 = i_3 = 0 \\ t \in (T_o, 2T_o) : i_3 = 0 \\ t > 2T_o : i = i_1 + i_2 + i_3 \end{cases}$$

Efectuând integralele Duhamel din expresia precedentă se obține expresia finală a răspunsului:

$$i(t) = \frac{U_o\tau_o}{LT_o}\left[\left(t-\tau_o+\tau_o e^{-t/\tau_o}\right)\cdot\gamma(t) + 2\left(\tau_o + T_o - t - \tau_o e^{-\frac{t-T_o}{\tau_o}}\right)\gamma(t-T_o) +\right.$$

$$\left.+\left(t-\tau_o-2T_o+\tau_o e^{-\frac{t-2T_o}{\tau_o}}\right)\cdot\gamma(t-2T_o)\right];$$

Cu transformata Laplace calculul curentului ar fi presupus:

$I(s)=\frac{U_i(s)}{Z(s)}=\frac{U_o}{T_o}\cdot\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{R+sL}\left(1-e^{-sT_o}\right)^2 \rightarrow i(t)$ ca având aceeaşi expresie ca şi prin metoda precedentă.

8. Circuitului din figura 9.59 i se aplică un impuls exponenţial de tensiune la poarta de intrare. Se cere răspunsul circuitului, tensiunea la poarta de ieşire $u_e(t)$, calculată prin trei metode.

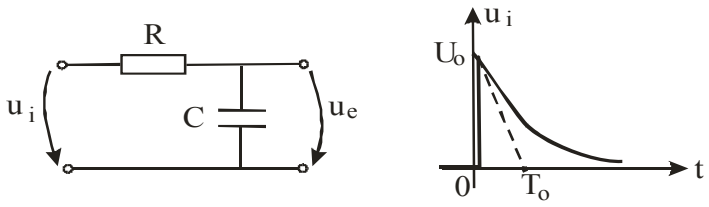


Fig.9.59

$\left.\begin{matrix}R=1k\Omega\\C=100\mu F\end{matrix}\right\}T=RC=0{,}1\sec$ – este constanta de timp a circuitului.

$\left.\begin{matrix}T_o=0{,}02\sec\\U_o=10V\end{matrix}\right\}u_i=U_oe^{-t/T_o}$ - expresia semnalului de intrare

. .

a)În domeniul timp, cu integrala Duhamel, se evaluează succesiv:

$\rightarrow$ funcţia indicială: $f(t)=1-e^{-t/RC}=1-e^{-t/T}$; $f(0)=0$; $f'(\tau)=\frac{1}{T}e^{-\tau/T}$

$\rightarrow$ răspunsul scris cu (9.100) este:

$$u_e(t)=u_i(t)\cdot f(0_+)+\int_0^t u_i(t-\tau)f'(\tau)d\tau=\int_0^t U_oe^{-\frac{t-\tau}{T_o}}\cdot\frac{1}{T}e^{-\frac{\tau}{T}}d\tau=$$

$$=\frac{U_o}{T}e^{-t/T_o}\int_0^t e^{-\tau\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_o}\right)}d\tau=\frac{U_oT_o}{T_o-T}\left(e^{-t/T_o}-e^{-t/T}\right);$$

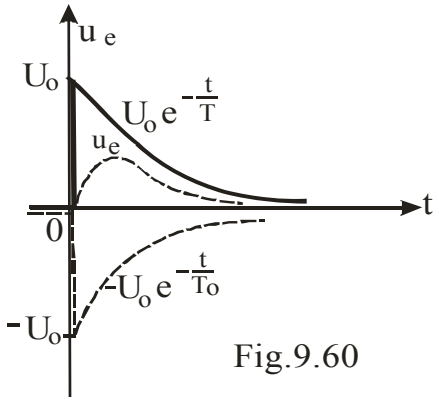


Fig.9.60

Numeric se obține expresia:
$u_e(t) = 2{,}5\left(e^{-10t} - e^{-50t}\right)$;
funcție care este reprezentată în figura 9.60.
Dacă $T = T_o$ atunci:

$$u_e(t) = \frac{U_o}{T} e^{-t/T_o} \int_0^t e^o d\tau = \frac{U_o}{T} t \cdot e^{-t/T}$$

b)Aceeaşi problemă rezolvată operațional cu Laplace, presupune:

$$I(s) = \frac{U_i(s)}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{U_o}{\left(s + \frac{1}{T_o}\right)\left(R + \frac{1}{sC}\right)} = \frac{sCU_o}{\left(s + \frac{1}{T_o}\right)(sRC + 1)} = \frac{s\frac{U_o}{R}}{\left(s + \frac{1}{T_o}\right)\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

Tensiunea de ieşire scrisă operațional este:

$$U_e(s) = \frac{1}{sC} I(s) = \frac{U_o}{RC} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{T_o}\right)\left(s + \frac{1}{T}\right)} = \frac{U_o}{T} \cdot \frac{TT_o}{T_o - T}\left(\frac{1}{s + \frac{1}{T_o}} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right);$$

şi revenind în timp: $u_e(t) = \frac{U_o T_o}{T_o - T}\left(e^{-t/T_o} - e^{-t/T}\right)$

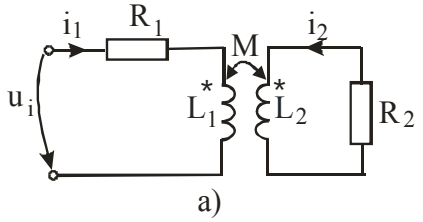
c)Se poate aplica şi transformata Fourier, semnalul de intrare admite transformată Fourier ($\lim_{t\to\infty} u_i(t) = 0$; $u_i(0-) = 0 \rightarrow$ transformata Fourier unilaterală).

$$\underline{I}(j\omega) = \frac{\underline{U}_i(j\omega)}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{U_o}{\left(j\omega + \frac{1}{T_o}\right)\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} \; ; \; \underline{U}_e(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}\underline{I}(j\omega);$$

Deşi calculul seamană cu regimul permanent sinusoidal, revenirea însă în domeniul timp se face altfel. Putem folosi fie tabelele de corespondență de la transformata Laplace pentru $s = j\omega$, fie transformata Fourier inversă:

$$u_e(t)=\frac{1}{2\pi j}\underbrace{\int_{-j\infty}^{j\infty}\underline{U}_e(j\omega)e^{-j\omega t}\,dj\omega}_{2\pi j\sum\text{reziduri}}=\frac{U_oT_o}{T_o-T}\left(e^{-t/T_o}-e^{-t/T}\right);$$

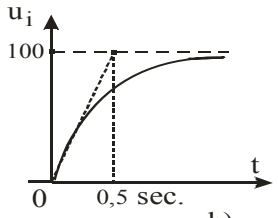
9. Circuitului din figura 9.61 i se aplică la intrare tensiunea: $u_i(t)=100(1-e^{-2t})$. Se cer expresiile curenților $i_1(t)$ şi $i_2(t)$.



a)

$$\begin{cases}R_1=2R_2=2\Omega\\L_1=L_2=2H\\M=\sqrt{L_1L_2}=\sqrt{2}H\end{cases}$$

Fig.9.61



b)

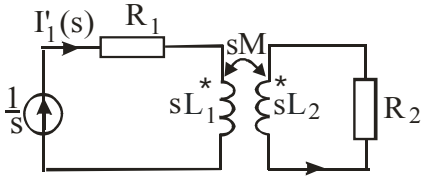


Fig.9.61 c)

Pentru a calcula funcția indicială f(t) presupunem că la intrare aplicăm în loc de $u_i(t)$, funcția treaptă unitate $\gamma(t)$ pentru care imaginea Laplace este $\frac{1}{s}$ şi schema operațională este cea din figura 9.61-c.

$$\begin{cases}(R_1+sL_1)I_1'+sMI_2'=\dfrac{1}{s}\\sMI_1'+(R_2+sL_2)I_2'=0\end{cases}\Rightarrow I_1'=\frac{s+1}{4s\left(s+\frac{1}{2}\right)}\rightarrow i_1'=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-t/2}=f(t)$$

Soluția obținută: $i_1'(t)=f(t)$ este răspunsul tranzitoriu al circuitului .
Atunci în domeniul timp, cu integrala Duhamel vom scrie succesiv:

$$x_i(t)=u_i(t)=100(1-e^{2t});\qquad x_i'(t)=200\cdot e^{-2t}$$

$$i(t) = x_e(t) = x_i(0)f(t) + \int_0^t x_i'(\tau)f(t-\tau)d\tau;$$

$$i_1(t) = 0 + \int_0^t 200\cdot e^{-2\tau}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}(t-\tau)}\right)d\tau = \left[50\left(1-e^{-2t}\right) - \frac{500}{3}e^{-2t} + \frac{100}{3}e^{-t}\right]\cdot\gamma(t)$$

Curentul în secundar se poate evalua operațional:

$$I_2(s) = \frac{sM}{R_2 + sL_2}I_1(s) = \frac{s\sqrt{2}}{1+s}I_1(s) \rightarrow i_2(t) = L^{-1}\left[I_2(s)\right]$$

10. Linii electrice lungi (linii omogene)

Circuitele cu parametri concentraţi de tip r, L, C reprezintă o aproximaţie cu atât mai bună cu cât frecvenţa de lucru este mai mică şi cu cât dielectricul din jurul circuitelor este mai bun izolant.

Regimurile staţionare (cvasistaţionare) neglijează curentul de deplasare dintre două conductoare vecine, curentul de conducţie este uniform repartizat pe secţiunea transversala şi constant în lungul unei laturi de circuit şi se ramifică doar în noduri de circuit. Izolaţia fiind perfectă se neglijează *perditanţa* izolaţiei (inversul rezistenţei de izolaţie dintre două conductoare).

În comunicaţii pe fire transmisia semnalelor şi a energiei se realizează prin *linii electrice lungi*, a căror lungime fizică ℓ este mult mai mare decât lungimea de undă λ a semnalului transmis.

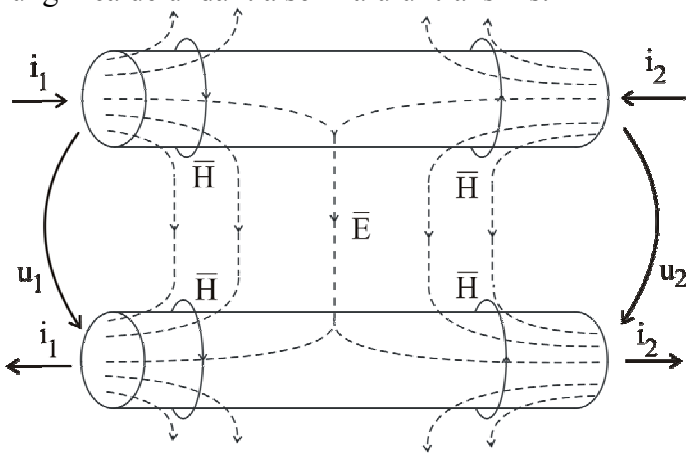


Fig. 10.1

Considerăm o linie bifilară omogenă în lungul său pentru care la frecvenţe înalte nu se neglijează curentul de deplasare dintre fire şi nici curentul de pierderi prin dielectricul imperfect dintre fire (fig, 10.1).

Liniile de curent se consideră închise doar dacă se ţine seama şi de curentul de deplasare dintre fire: $\bar{J}_t = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \sigma_i \bar{E} + \varepsilon_i \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$. (10.1)

Prin dielectric va exista curentul de conducţie $\sigma_i \bar{E}$ şi curentul de deplasare $\varepsilon_i \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$.

Din cauza curenților ce se ramifică transversal între fire, în lungul firului valoarea curentului nu mai rămâne constantă ci chiar îşi poate schimba sensul (figura 10.1).

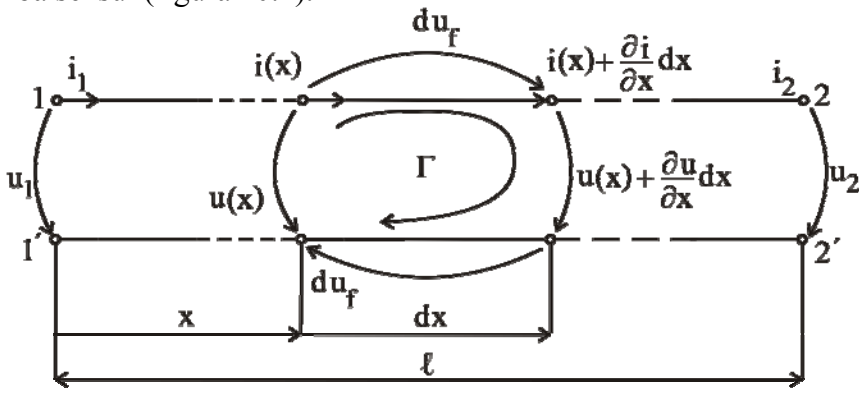


Fig. 10.2

Studiul exact al problemei, plecând de la ecuațiile lui Maxwell arată că este vorba de o propagare a undei electromagnetice în lungul liniei, propagarea fiind ghidată în spațiu de firele liniei, dar problema se poate transpune pentru a fi studiată ca o problemă de circuit electric. Neglijăm componentele longitudinale ale curenților $\sigma\overline{E}$ şi $\varepsilon\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}$ care se ramifică transversal de la un fir la altul, atunci câmpul magnetic $\overline{H}$ în orice secțiune transversală face rotoare în jurul firului iar valoarea sa depinde de valoarea curentului în acea secțiune.

10.1 Ecuațiile liniilor electrice lungi

Considerăm o linie bifilară cu lungimea ℓ mult mai mare decât lungimea de undă a semnalului transmis pe linie $\left(\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\omega}v\right)$ şi luăm un tronson infinitezimal de lungime dx aşezat în secțiunea x a liniei, socotită în raport cu bornele de intrare 1-1' (figura 10.2).

Dacă $R_\ell/2$ *este rezistența lineică* a unui fir [Ω/m], tensiunea în lungul firului este $du_f = 1/2 R_\ell i(x)dx$.

Dacă L_ℓ este *inductivitatea lineică* [H/m] atunci fluxul magnetic prin suprafața tronsonului de linie (cu suprafața ds=Ddx) este $d\Phi_{S_\Gamma} = L_\ell i(x)dx$.

Aplicăm legea inducției electromagnetice pe curba infinitezimală Γ sub forma:

$$e_\Gamma = \oint_{\Gamma\ \text{ind}} \overline{E}\quad \overline{d\ell} = -\frac{\partial \Phi_{S_\Gamma}}{\partial t}$$

$$e_\Gamma = du_f + (u_x + \frac{\partial u}{\partial x}dx) + du_f - u_x = -\frac{\partial}{\partial t}(L_\ell i_x dx)$$

$$e_\Gamma = \frac{1}{2}R_\ell i dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{1}{2}R_\ell i dx = -L_\ell \frac{\partial i}{\partial t}dx$$

$$\text{Respectiv: } -\frac{\partial u}{\partial x} = R_\ell i + L_\ell \frac{\partial i}{\partial t} \qquad (10.2)$$

Ecuația (10.2) constituie prima ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi a liniilor lungi şi care exprimă că: „ scăderea tensiunii în lungul liniei este egală cu suma căderilor de tensiune rezistivă şi inductivă pe firele liniei”.

Dacă G_ℓ este *perditanța lineică* [Ω^{-1}/m] a izolației dintre fire, atunci curentul de conducție care se scurge de la un fir la altul prin izolația imperfectă, pe porțiunea dx este: $di_G = G_\ell u(x)dx$, iar dacă C_ℓ este *capacitatea lineică* [F/m] dintre cele două fire, atunci porțiunea dx se va încărca cu sarcina: $dq = C_\ell u(x)dx$.

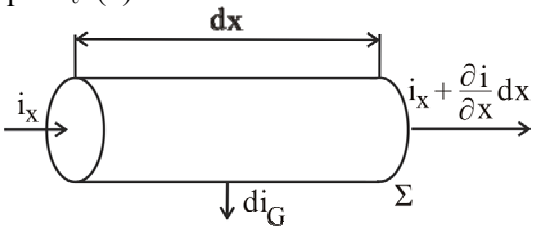


Fig. 10.3

Legea conservării sarcinii aplicată pentru suprafața închisă infinitezimală Σ (figura 10.3) ce înconjoară tronsonul de fir cu lungimea dx este:

$$i_\Sigma = -\frac{dq_\Sigma}{dt} \quad \leftrightarrow \quad -i_x + (i_x + \frac{\partial i}{\partial x}dx) + G_\ell u_x dx = -C_\ell \frac{\partial u}{\partial t}dx$$

$$\text{Respectiv : } \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = G_\ell u + C_\ell \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (10.3)$$

Ecuația (10.3) constituie cea de-a doua ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi a liniilor lungi şi care spune că: ,,scăderea curentului electric în lungul firului este egală cu suma dintre curentul de pierderi prin izolație şi curentul de deplasare dintre fire, curenți ce ies prin suprafața laterală de la un fir la altul.”

Cele două ecuații (10.2) şi (10.3) împreună formează un sistem de două ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi, cunoscute sub numele de *ecuațiile telegrafiştilor de ordinul I*:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = R_\ell i + L_\ell \dfrac{\partial i}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = G_\ell u + C_\ell \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \tag{10.4}$$

Dacă mai derivăm o dată prima ecuație în raport cu x şi ținem seama de cea de-a doua ecuație, se obține:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R_\ell G_\ell u + (R_\ell C_\ell + L_\ell G_\ell)\frac{\partial u}{\partial t} + L_\ell C_\ell \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{10.5}$$

şi similar se obține o ecuație pentru i(x,t):

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = R_\ell G_\ell i + (R_\ell C_\ell + L_\ell G_\ell)\frac{\partial i}{\partial t} + L_\ell C_\ell \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \tag{10.6}$$

Ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul doi (10.5) şi (10.6) se numesc *ecuațiile telegrafiştilor de ordinul II*. Deşi cele două ecuații sunt de aceeaşi formă şi sunt independente (una în variabila u(x,t) şi alta în i(x,t)), soluțiile lor nu sunt independente, fiind legate prin ecuațiile (10.4). În realitate se integrează doar una dintre ele (în condiții inițiale şi la limită (capete) precizate) şi soluția se înlocuieşte în (10.4) pentru a determina cealaltă necunoscută. Integrarea lor în regim tranzitoriu se poate face şi operațional : L[u(x,t)] = U(s,x).

Observație: la frecvențe joase parametrii lineici (R_ℓ, G_ℓ, L_ℓ, C_ℓ) se pot calcula ca şi în regim staționar. La frecvențe înalte repartiția curentului pe secțiunea firului se modifică din cauza efectului pelicular (şi de vecinătate) deci R_ℓ creşte; dielectricul are şi pierderi prin histerezis, deci şi G_ℓ creşte. Ceilalți doi parametri au valorile cunoscute pentru o linie bifilară:

$$C_\ell = \frac{\pi\varepsilon}{\ln D/a}\ [F/m] \quad ; \quad L_\ell = \frac{\mu}{\pi}\ln\frac{D}{a}\ [H/m] \tag{10.7}$$

10.2 Regimul tranzitoriu al liniilor fără pierderi

Liniile se consideră fără pierderi dacă se neglijează pierderile Joule atât pe fire cât şi în dielectricul dintre fire, respectiv $G_\ell=R_\ell=0$. Ecuațiile telegrafiştilor de ordinul I şi II devin de forma:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = L_\ell \dfrac{\partial i}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = C_\ell \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_\ell C_\ell \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_\ell C_\ell \dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{cases} \tag{10.8}$$

Aceste ecuații sunt de acelaşi tip (ecuații cu derivate parțiale de ordinul II de tip hiperbolic) cu ecuațiile (4.24) care se referă la unda electromagnetică plană ce se propagă printr-un mediu dielectric. Deci la fel se propagă unda (semnalul) pe o linie fără pierderi ca şi unda plană printr-un mediu dielectric. Soluția ecuațiilor (10.8) conține o undă directă şi una inversă care se propagă în lungul liniei cu viteza $v_o = \pm\frac{1}{\sqrt{LC}}$ (aşa cum la unda plană era $v_o = \pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$; deci: $u(x,t)=u_d(x-v_ot)+ u_i(x+v_ot)$. (10.9)

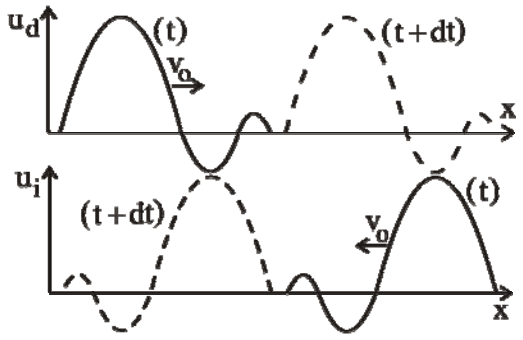


Fig. 10.4

Cele două componente se propagă în lungul axei x ca în figura 10.4. Funcțiile u_d şi u_i sunt arbitrare, forma lor depinde de alimentarea liniei (semanlul transmis) dar şi de condiția inițială şi la limită (x = 0; x = ℓ).

Cunoscând soluția u(x,t), unda de curent i(x,t) rezultă din ecuațiile de ordinul întâi din (10.8):

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = L_\ell \frac{\partial i}{\partial t} \;\leftrightarrow\; -u'_d - u'_i = L_\ell \frac{\partial i}{\partial t} \rightarrow \begin{cases} u'_d = \dfrac{\partial u_d}{\partial x} = \dfrac{-1}{v_o}\cdot\dfrac{\partial u_d}{\partial t} \\ u'_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = \dfrac{1}{v_o}\cdot\dfrac{\partial u_i}{\partial t} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[L_\ell i - \frac{1}{v_o}(u_d - u_i)\right] = 0 \;\Rightarrow\; i = \frac{1}{v_o L_\ell}(u_d - u_i) + A(x) \qquad (10.10)$$

Dacă $Z_o = v_o L_\ell = \frac{1}{v_o C_\ell} = \sqrt{\frac{L_\ell}{C_\ell}} > 0$ este *impedanța caracteristică* a liniei fără pierderi, atunci expresia curentului devine de forma:

$$i(x,t) = \underbrace{\frac{1}{Z_o}u_d(x - v_o t)}_{i_d} - \underbrace{\frac{1}{Z_o}u_i(x + v_o t)}_{i_i} + A(x) \qquad (10.11)$$

La unda plană impedanţa de undă a mediului prin care avea loc propagarea pe o linie era: $Z = \mu v = \frac{1}{\varepsilon v} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \cdot Z_O$ (10.12)

Făcând o analogie între propagarea undei plane prin dielectric şi propagarea pe o linie fără pierderi, se pot stabili corespondenţele:

Unda plană		Linia fără pierderi
E_y	↔	u
H_z	↔	i
ε	↔	C_ℓ
μ	↔	L_ℓ
$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$	↔	$v=\frac{1}{\sqrt{L_\ell C_\ell}}$
$Z=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	↔	$Z=\sqrt{\frac{L_\ell}{C_\ell}}$
undă directă	↔	semnal direct
undă inversă	↔	semnal invers

10.3 Linii lungi în regim permanent sinusoidal

În regim permanent sinusoidal undele de tensiune u(x,t) şi cele de curent i(x,t) sunt în fiecare punct de pe linie (x=cst) funcţii sinusoidale de timp, de aceeaşi frecvenţă şi se pot reprezenta în complex:

$$\begin{cases} u(x,t) = \sqrt{2}\sin[\omega t + \gamma_u(x)] \\ i(x,t) = \sqrt{2}\sin[\omega t + \gamma_u(x) - \varphi(x)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{U}(x) = U(x)\ \ \gamma_u(x) \\ \underline{I}(x) = I(x)\ \ \gamma_u(x) - \varphi(x) \end{cases} \quad (10.13)$$

Ecuaţiile telegrafiştilor de ordinul I şi II transpuse în complex nu mai sunt ecuaţii cu derivate parţiale ci devin ecuaţii diferenţiale ordinare, de forma:

$$\begin{cases} -\frac{d\underline{U}}{dx} = (R_\ell + j\omega L_\ell)\underline{I} = \underline{Z}_\ell \underline{I} \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} = (G_\ell + j\omega C_\ell)\underline{U} = \underline{Y}_t \underline{U} \end{cases}; \begin{cases} \frac{d^2\underline{U}}{dx^2} = (R_\ell + j\omega L_\ell)(G_\ell + j\omega C_\ell)\underline{U} = \underline{Z}_\ell \underline{Y}_t \underline{U} \\ \frac{d^2\underline{I}}{dx^2} = (R_\ell + j\omega L_\ell)(G_\ell + j\omega C_\ell)\underline{I} = \underline{Z}_\ell \underline{Y}_t \underline{I} \end{cases}$$

(10.14)

Notăm:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_\ell + j\omega L_\ell)(G_\ell + j\omega C_\ell)} = \sqrt{\underline{Z}_\ell \underline{Y}_t} = \alpha + j\beta$$

$\underline{Z}_\ell = R_\ell + j\omega L_\ell$ - *impedanța lineică longitudinală* $\left[\Omega / m\right]$

$\underline{Y}_t = G_\ell + j\omega C_\ell$ - *admitanța lineică transversală* $\left[\Omega^{-1} / m\right]$ (10.15)

$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_\ell \underline{Y}_t}$ - *constanta de propagare* a liniei, pe unitatea de lungime

$$\alpha = \mathrm{Re}\{\underline{\gamma}\} = \sqrt{\frac{1}{2}[R_\ell G_\ell - \omega^2 L_\ell C_\ell + \sqrt{\underline{Z}_\ell \underline{Y}_t}\,]} \geq 0$$ - *constanta de atenuare* a liniei

$$\beta = \mathrm{Im}\{\underline{\gamma}\} = \sqrt{\frac{1}{2}[\omega^2 L_\ell C_\ell - R_\ell G_\ell + \sqrt{\underline{Z}_\ell \underline{Y}_t}\,]} \geq 0$$ - *constanta de defazare* a liniei

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{1}{2}[\omega^2 L_\ell C_\ell - R_\ell G_\ell + \sqrt{\underline{Z}_\ell \underline{Y}_t}\,]}}$$ - *viteza de fază* a undei pe linie

Ecuațiile de ordinul doi (10.4) devin de forma:

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{U} \quad ; \quad \frac{d^2\underline{I}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{I} \tag{10.16}$$

Soluția ecuației în variabila $\underline{U}$ este de forma:

$$\underline{U}(x) = \underbrace{\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x}}_{\underline{U}_d(x)} + \underbrace{\underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}}_{\underline{U}_i(x)} = \underline{U}_{d_0} e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{U}_{i_0} e^{\underline{\gamma}x} \tag{10.17}$$

Curentul complex şi el va avea două componente ce se propagă în lungul liniei (pe axa Ox) în sensuri contrarii cu aceeaşi viteză (curentul direct şi invers):

$$\underline{I}(x) = \frac{-1}{\underline{Z}_\ell} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_\ell}(\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}) \tag{10.18}$$

Notăm: $\underline{Z}_c = \sqrt{\dfrac{R_\ell + j\omega L_\ell}{G_\ell + j\omega C_\ell}} = \dfrac{\underline{Z}_\ell}{\underline{\gamma}} = \dfrac{\underline{\gamma}}{\underline{Y}_t} = Z_c \ \varphi_c$ (10.19)

impedanța caracteristică a liniei cu pierderi. Curentul complex (10.18) se poate scrie astfel:

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{-\underline{\gamma}x} + \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{\underline{\gamma}x} = \frac{\underline{U}_{d_o}}{\underline{Z}_c} e^{-\underline{\gamma}x} + (-\frac{\underline{U}_{i_o}}{\underline{Z}_c} e^{\underline{\gamma}x}) = \underline{I}_d(x) + \underline{I}_i(x)$$

(10.20)

Mărimile $\underline{Z}_c$ şi $\underline{\gamma}$ se mai numesc *parametri secundari* ai liniilor lungi. În funcție de aceştia, se pot scrie ecuațiile liniilor lungi în regim sinusoidal, atunci când se cunosc tensiunea şi curentul la intrarea pe linie (x=0): $\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_1$ sau la ieşirea de pe linie (x=ℓ): $\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$.

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}(0) = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{I}(0) = \dfrac{\underline{A}_1 - \underline{A}_2}{\underline{Z}_c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{A}_1 = \dfrac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{Z}_c \underline{I}_1) \\ \underline{A}_2 = \dfrac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{Z}_c \underline{I}_1) \end{cases} \tag{10.21}$$

Deci ecuațiile liniilor lungi se scriu sub formă similară cu ecuațiile pentru lanțurile de cuadripoli:

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_1 \mathrm{ch}\underline{\gamma}x - \underline{Z}_c \underline{I}_1 \mathrm{sh}\underline{\gamma}x \\ \underline{I}(x) = \underline{I}_1 \mathrm{ch}\underline{\gamma}x - \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \mathrm{sh}\underline{\gamma}x \end{cases} \xrightarrow{(x=\ell)} \begin{cases} \underline{U}_2(x) = \underline{U}_1 \mathrm{ch}\underline{\gamma}\ell - \underline{Z}_c \underline{I}_1 \mathrm{sh}\underline{\gamma}\ell \\ \underline{I}_2(x) = \underline{I}_1 \mathrm{ch}\underline{\gamma}\ell - \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \mathrm{sh}\underline{\gamma}\ell \end{cases} \tag{10.22}$$

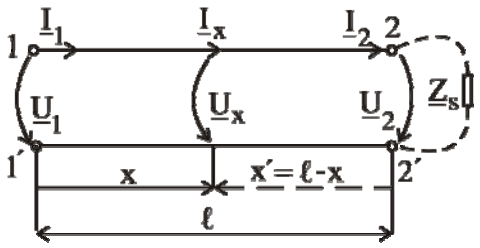


Fig. 10.5

Dacă raportarea se face față de bornele de ieşire ale liniei (x′=ℓ-x, figura 10.5) atunci:

$$\begin{cases} \underline{U}_{x'} = \underline{U}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}x' + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \mathrm{sh}\underline{\gamma}x' \\ \underline{I}_{x'} = \underline{I}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}x' + \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \mathrm{sh}\underline{\gamma}x' \end{cases} \xrightarrow{(x'=\ell)} \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}\ell + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \mathrm{sh}\underline{\gamma}\ell \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \mathrm{ch}\underline{\gamma}\ell + \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \mathrm{sh}\underline{\gamma}\ell \end{cases} \tag{10.23}$$

Impedanța de sarcină $\underline{Z}_s$ conectată la ieşirea liniei are expresia:

$$\underline{Z}_s = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right| : \underline{I}_1 \mathrm{ch}\underline{\gamma}\ell = \frac{\underline{Z}_i - \underline{Z}_c \mathrm{th}\underline{\gamma}\ell}{1 - \dfrac{\underline{Z}_i}{\underline{Z}_c}\mathrm{th}\underline{\gamma}\ell} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_i - \underline{Z}_c \mathrm{th}\underline{\gamma}\ell}{\underline{Z}_c - \underline{Z}_i \mathrm{th}\underline{\gamma}\ell} \tag{10.24}$$

Coeficientul de reflexie al undelor, la joncțiunea dintre linie şi $\underline{Z}_s$ este:

$$\underline{K}_{rf} = \frac{\underline{U}_{2i}}{\underline{U}_{2d}} = -\frac{\underline{I}_{2i}}{\underline{I}_{2d}} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_c \underline{I}_2}{\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_s - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_c} \tag{10.25}$$

Dacă linia funcționează *adaptat* ($\underline{Z}_S = \underline{Z}_c$) nu va exista reflexie de semnal, $\underline{K}_{rf} = 0$ şi $\underline{U} = \underline{U}_d$; $\underline{I} = \underline{I}_d$. Pentru o linie fără pierderi $(R_\ell = G_\ell = 0)$ expresiile (10.15) devin:

$$\alpha = 0\,;\ \beta = \omega\sqrt{L_\ell C_\ell}\ ;\ \underline{\gamma} = j\beta\,;\ \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L_\ell}{C_\ell}}\ \text{şi}\ v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_\ell C_\ell}}\ (10.26).$$

Cum v nu depinde de frecvența ω înseamnă că toate armonicile unui semnal se propagă de-a lungul liniei cu aceeaşi viteză, ele ajung simultan la capătul 2-2´ al liniei şi se reface forma semnalului de la intrare. Se spune că liniile fără pierderi nu distorsionează semnalul, ele se numesc *linii fără dispersie.*

Pentru linia cu pierderi, *viteza de fază* (cea pentru care faza inițială $(\omega t - \beta x)$ rămâne constantă) a unui semnal sinusoidal este:

$$v(\omega) = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{1}{2}(\omega^2 L_\ell C_\ell - R_\ell G_\ell + \sqrt{\underline{Z}_\ell \underline{Y}_t}}} = f(\omega) \qquad (10.27)$$

Cum viteza v depinde de frecvență, nu toate armonicile unui semnal se propagă cu aceeaşi viteză în lungul liniei, armonicile înalte au viteză mai mare şi ajung mai repede la capătul 2-2´ şi se suprapun peste armonicile joase ale unui semnal precedent, linia prezintă distorsiuni ale semnalelor; linia cu pierderi este o *linie cu dispersie*.

Linia cu pierderi poate deveni linie fără distorsiuni dacă parametrii săi îndeplinesc *condiția Heavisaide*: $\frac{R_\ell}{L_\ell} = \frac{G_\ell}{C_\ell}$. (10.28)

În acest caz: $v = \frac{1}{\sqrt{L_\ell C_\ell}} = ct.$ şi se elimină distorsiunea liniei.

Dar: $\alpha = R_\ell \sqrt{\frac{C_\ell}{L_\ell}} = G_\ell \sqrt{\frac{L_\ell}{C_\ell}} \neq 0\,;\ Z_c = \sqrt{\frac{L_\ell}{C_\ell}} = Z_o\,;\ \varphi_c = 0\,.$ (10.29)

Satisfacerea condiției Heavisaide (10.28) la cablurile telefonice este mai greu de îndeplinit, datorită capacității lor C_ℓ mari şi L_ℓ mică. Deci este nevoie a se mări artificial inductivitatea lineică L_ℓ. Prin *procedeul Krarup* se înfăşoară cablul cu o bandă feromagnetică mărind astfel L_ℓ până se satisface (10.28).

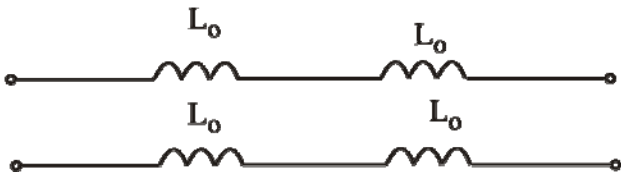


Fig. 10.6

Procedeul Pupin presupune a secționa cablul şi la intervale egale (mai mici decât λ) se introduc bobine cu inductivitatea L_o (figura 10.6) care să îndeplinească (10.28). Aceste bobine vor întârzia armonicile înalte sosite primele până se reface semnalul inițial şi ultima refacere este la bornele de ieşire 2-2′ (*pupinizarea cablului*).

Aplicație

Să se determine impedanța de intrare $\underline{Z}_i$ a unei linii omogene de lungime ℓ având parametrii $\underline{Z}_c$ şi $\underline{\gamma}$ când este închisă pe impedanța de sarcină $\underline{Z}_s$. Să se particularizeze expresia lui $\underline{Z}_i$ în următoarele cazuri:

$a_1)$ $\underline{Z}_s = \underline{Z}_c$; $a_2)$ $\underline{Z}_s = 0$ (mers în scurt); $a_3)$ $\underline{Z}_s \to \infty$ (mers în gol).

b) pentru linia fără pierderi $\left(R_\ell = G_\ell = 0 \;;\; \alpha = 0\right)$.

c) pentru linia de lungime egală cu un număr par (impar) de sferturi de lungime de undă $(\lambda/4)$.

d) pentru linia infinit lungă $\left(\ell \to \infty\right)$.

Plecând de la ecuațiile (10.23) ale liniei lungi putem scrie:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2\left(\mathrm{ch}\underline{\gamma}\ell + \dfrac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_s}\mathrm{sh}\underline{\gamma}\ell\right) \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2\left(\mathrm{ch}\underline{\gamma}\ell + \dfrac{\underline{Z}_s}{\underline{Z}_c}\mathrm{sh}\underline{\gamma}\ell\right) \end{cases} \qquad (10.30)$$

Impedanța de intrare se scrie succesiv sub forma:

$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_s \frac{\mathrm{ch}\underline{\gamma}\ell + \dfrac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_s}\mathrm{sh}\underline{\gamma}\ell}{\mathrm{ch}\underline{\gamma}\ell + \dfrac{\underline{Z}_s}{\underline{Z}_c}\mathrm{sh}\underline{\gamma}\ell} = \underline{Z}_c \frac{1 + \dfrac{\underline{Z}_s - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_c}e^{-2\underline{\gamma}\ell}}{1 + \dfrac{\underline{Z}_c - \underline{Z}_s}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_c}e^{-2\underline{\gamma}\ell}}$$

$a_1)$ Dacă $\underline{Z}_s = \underline{Z}_c \Rightarrow \underline{Z}_i = \underline{Z}_c$ - linia funcționează adaptat.

$a_2)$ Dacă $\underline{Z}_s = 0 \Rightarrow \underline{Z}_i = \underline{Z}_c \dfrac{1 - e^{-2\underline{\gamma}\ell}}{1 + e^{-2\underline{\gamma}\ell}} = \underline{Z}_c \mathrm{th}\underline{\gamma}\ell$ - linia merge în scurt.

$a_3)$ Dacă $\underline{Z}_s \to \infty \Rightarrow \underline{Z}_i = \underline{Z}_c \mathrm{cth}\underline{\gamma}\ell$ 1 - linia merge în gol.

b) Pentru o linie fără pierderi: $\underline{\gamma} = j\beta$; $\underline{Z}_c = Z_c \rightarrow \underline{Z}_i = \underline{Z}_c \dfrac{1 + j\dfrac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_s} tg\beta\ell}{1 + j\dfrac{\underline{Z}_s}{\underline{Z}_c} tg\beta\ell}$

deci linia funcționează ca un transformator de impedanțe.

c) Dacă lungimea liniei este $\ell = k\dfrac{\lambda}{4}$; k=par (impar), atunci:

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} k\frac{\lambda}{4} = k\frac{\pi}{2} \; ; \; e^{-2\underline{\gamma}\ell} = e^{-2\alpha\ell} e^{-j2\beta\ell} = e^{-2\alpha\ell} e^{-jk\frac{\pi}{2}} = (-1)^k e^{-2\alpha\ell}.$$

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_c \frac{(\underline{Z}_s + \underline{Z}_c) + (\underline{Z}_s - \underline{Z}_c)e^{-2\underline{\gamma}\ell}}{(\underline{Z}_s + \underline{Z}_c) - (\underline{Z}_s - \underline{Z}_c)e^{-2\underline{\gamma}\ell}} = \underline{Z}_c \frac{(\underline{Z}_s + \underline{Z}_c) + (-1)^k(\underline{Z}_s - \underline{Z}_c)}{(\underline{Z}_s + \underline{Z}_c) - (-1)^k(\underline{Z}_s - \underline{Z}_c)}.$$

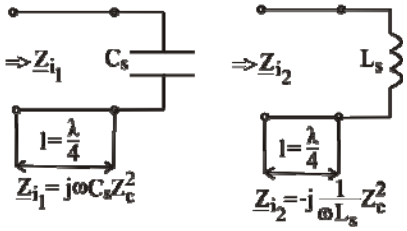


Fig. 10.7

Dacă $\alpha = 0$ (linie fără pierderi) atunci:

$\begin{cases} \underline{Z}_i = \underline{Z}_s & \text{pentru k=par – linie sfert lungime de undă, adaptat} \\ \underline{Z}_i = \dfrac{Z_c^2}{\underline{Z}_s} & \text{pentru k=impar – linie jumătate lungime de undă şi în acest caz linia se comportă ca un girator, schimbând caracterul de sarcină } \underline{Z}_s \text{ ca în figura 10.7.} \end{cases}$

d) Pentru linia de lungime infinită: $\lim\limits_{\ell \to \infty} e^{-2\underline{\gamma}\ell} = 0 \rightarrow \underline{Z}_i = \underline{Z}_c$, valoarea sa este independentă de valoarea lui $\underline{Z}_s$.

Bibliografie

1. Andronescu, PL., *Bazele electrotehnicii*, vol I şi II, EDP, Bucureşti; 1972
2. Antoniu, I.S., *Bazele electrotehnicii*, vol I şi II, EDP, Bucureşti; 1974
3. Binns, K.J., Lawrenson, P.J., Trowbridge, C.W., *The analytical and numerical solution of electric and magnetic fields*, John Wilez&Sons, 1995
4. Bossavit,A., *Modelásation numèrique en èlectrotechnique, Notes de cours*, Bucureşti, 1995
5. De Sabata, I., *Bazele electrotehnicii*, vol I, II, III, Lito I.P.Timişoara, 1972
6. Edminister, J.A., *Electromagnetics, Theory and Problems*, McGraw-Hill, Inc., 1993
7. Ghircoiaşu., N., s.a. *Matematici speciale*, vol I,II, Lito I.P. Cluj-Napoca, 1981
8. Hameyer, K., Belmans, R., *Numerical Modelling and Design of Electrical Machines and Devices*, WIT Press, Boston, 1995
9. Mîndru, Gh., *Electrotehnică*, Lito I.P. Cluj-Napoca, 1976
10. Mîndru, Gh., Rădulescu, M.M., *Analiza numerică a câmpului electromagnetic*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1986
11. Mîndru, Gh., *Teoria câmpului electromagnetic, Probleme*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2000
12. Mîndru, Gh., ş.a. *Bazele electrotehnicii, Probleme,* Lito I.P. Cluj-Napoca, 1976
13. Mocanu, C.I., *Teoria câmpului electromagnetic,* EDP, Bucureşti, 1981
14. Moraru, A., Frăţiloiu,G., *Bazele electrotehnicii, Probleme,* Editura BIC ALL, 1999
15. Nasar, S.A., *Solved Problems in Electromagnetics,* McGRAW-HILL, INC, 1992
16. Neiman, L.R., Kalantarov, P.L., *Bazele electrotehnicii,* vol. I, II, ET, Bucureşti, 1956
17. Nicolaide, A., *Bazele fizice ale electrotehnicii*, Editura Scrisul românesc, Craiova, 1983/86
18. Preda, M., Cristea, P., Spinei F., *Bazele electrotehnicii,* vol.I, EDP, Bucureşti, 1981
19. Răduleţ, R., *Bazele electrotehnicii. Probleme,* vol I, EDP, Bucureşti, 1981

20. Simion, E., Maghiar, T., *Electrotehnică*, EDP, Bucureşti, 1981
21. Simony, K., *Electrotehnică teoretică*, ET, Bucureşti, 1974
22. Sykulski, J.K., *Computational Magnetics*, Chapman&Hall, London, 1995
23. Şora, C., *Bazele electrotehnicii*, EDP, Bucureşti, 1982
24. Timotin, Al., ş.a., *Lecţii de Bazele electrotehnicii*, EDP, Bucureşti, 1970